Lien entre mathématiques et physique-chimie : **Nombre dérivé, fonction dérivée**

1. Le nombre dérivé

1.1. Taux de variation et nombre dérivé : définitions mathématiques

Le taux de variation

On considère une fonction $x \mapsto f(x)$. Le taux de variation de cette fonction entre x_0 et $x_0 + \Delta x$ vaut par définition :

$$\frac{f(x) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)$$

Le taux de variation représente le coefficient directeur de la droite bleue représentée ci-dessous.

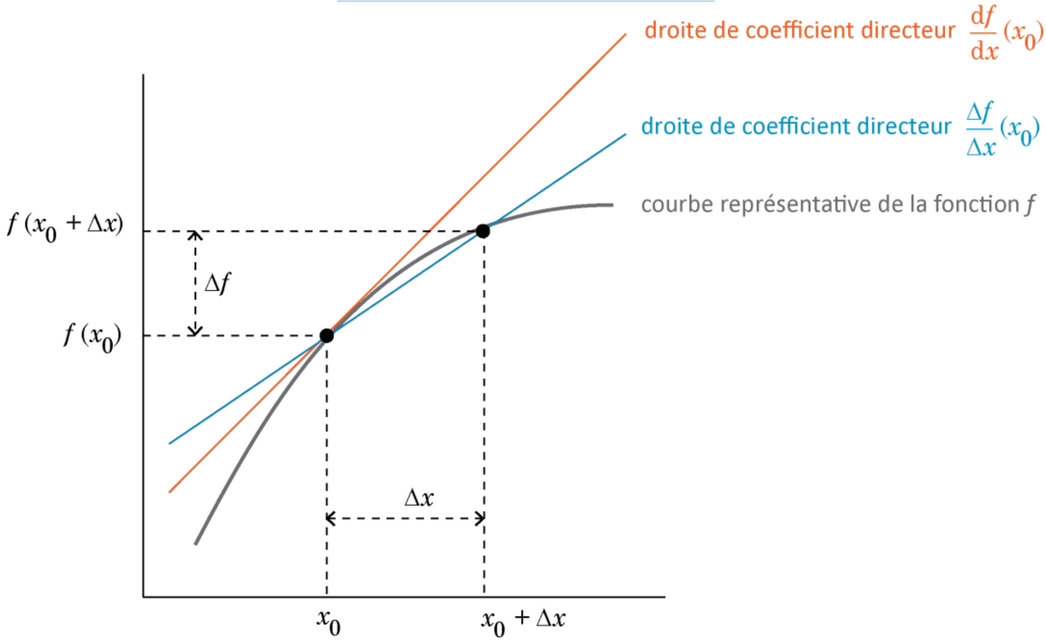
Le nombre dérivé

Lorsque Δx tend vers 0, le taux de variation représente **le coefficient directeur de la tangente** à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse x_0 (droite orange ci-dessous). On l'appelle le **nombre dérivé** de la fonction f en x_0. Il peut être noté de deux manières :

$$f'(x_0) \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

On a donc :

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)}$$



Interprétation du nombre dérivé : le sens de variation de la fonction

Le nombre dérivé étant le coefficient directeur de sa tangente au point d'abscisse x_0 :

- Si ce nombre dérivé est **positif**, alors la fonction est **croissante** en x_0.
- Si ce nombre dérivé est **négatif**, alors la fonction est **décroissante** en x_0.
- Si ce nombre dérivé est **nul**, alors la fonction a un **extremum** (maximum ou minimum) en x_0.

1.2. Différence de notation entre les mathématiques et la physique-chimie

En physique-chimie, la plupart des grandeurs que l'on utilise dépendent **du temps** : la variable est donc souvent t.

Exemples :

- En chimie : si $c(t)$ est la valeur d'une concentration (exprimée en mol/L) à la date t (exprimée en s) alors le nombre dérivé de cette concentration s'exprime en mol/L **par seconde** : il représente une vitesse de réaction.
- En physique : si $x(t)$ représente la valeur d'une distance parcourue par un point sur un axe horizontal (exprimée en mètre) à la date t, alors le nombre dérivé de cette distance s'exprime en mètre **par seconde** : il représente sa vitesse à la date t.

Pour cette raison, entre autres, les physico-chimistes préfèrent la notation « $\frac{d}{dt}$ » à la notation « prime » : cela fait apparaître l'unité de la grandeur que l'on calcule au moyen du nombre dérivé.
Par exemple on écrira :

vitesse à la date t exprimée **en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$**

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$$

« petite » variation de la distance parcourue exprimée **en m**.

« petite » durée, exprimée **en s**.

2. Fonction dérivée

2.1. Définition

Si f est une fonction et t la variable, alors la fonction $t \mapsto \frac{df}{dt}(t)$ est la **fonction dérivée** de f

2.2. Quelques cas particuliers à connaître

Dans tous les exemples qui suivent, t désigne la variable et toutes les autres lettres désignent des constantes.

Fonction dérivée

$t \longmapsto a$	$t \longmapsto 0$
$t \longmapsto a \times t$	$t \longmapsto a$
$t \longmapsto a \times t^2$	$t \longmapsto 2a \times t$
$t \longmapsto a \cos(\omega t + \varphi)$	$t \longmapsto -\omega a \times \sin(\omega t + \varphi)$
$t \longmapsto a \sin(\omega t + \varphi)$	$t \longmapsto \omega a \times \cos(\omega t + \varphi)$