Lien entre mathématiques et physique :
Produit scalaire de deux vecteurs

1. Définition et premières propriétés du produit scalaire

1.1. Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est **un nombre** tel que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$$

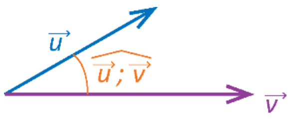
Le produit scalaire de deux vecteurs dépend donc de leurs normes et de l'angle entre eux.

1.2. Remarque à propos du signe du produit scalaire

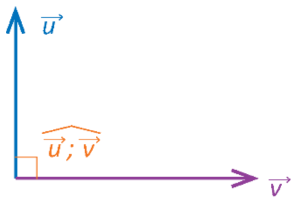
Le produit scalaire est proportionnel au cosinus de l'angle entre eux.Or :

- le cosinus d'un angle inférieur à 90° est positif ;
- le cosinus d'un angle inférieur à 90° est positif ;
- le cosinus d'un angle inférieur à 90° est positif.

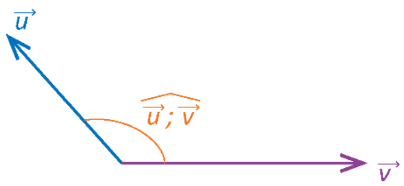
On en déduit les trois cas suivants :



L'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est inférieur à 90°.
Leur produit scalaire est donc **positif**.



L'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à 90°.
Leur produit scalaire est donc **nul**.



L'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est supérieur à 90°.
Leur produit scalaire est donc **positif**.

1.3. En physique : produit scalaire et unité

En physique chaque vecteur représente **une grandeur physique** et sa valeur a donc une unité. Leur produit scalaire représente donc une autre grandeur physique, dont la valeur a une autre unité.

Exemple : le produit scalaire d'un vecteur-force et d'un vecteur déplacement est un travail :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Travail en $\mathrm{N \cdot m = J}$ (**joule**)

Vecteur-force dont la valeur est en **newton (N)**

Vecteur-déplacement dont la valeur est en **mètre (m)**

2. Produit scalaire et coordonnées

Si l'espace est muni d'un repère orthonormé et si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

On montre que le produit scalaire de ces deux vecteurs est somme des produits de leurs coordonnées, soit :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Cette propriété permet de démontrer l'expression du travail du poids d'une force (voir fiche de synthèse « énergie cinétique et travail d'une force »).