



Séquence n°1

Mesure et Incertitudes



Fiches de synthèse mobilisées :

- Fiche de synthèse n°1 : Mesure et Incertitudes

Sommaire des activités

ACTIVITÉ 1 :	La mesure de la longueur de la piste est-elle juste ?.....	1
ACTIVITÉ 2 :	L'ampèremètre de mon lycée donne-t-il une valeur juste ?	5
ACTIVITÉ 3 :	Estimation de l'incertitude-type de mesure dans le cas d'une mesure unique	8
ACTIVITÉ 4 :	Estimation de l'incertitude-type dans le cas de lecture sur une échelle graduée	10
ACTIVITÉ 5 :	Estimation de l'incertitude-type de la valeur moyenne	12

ACTIVITÉ 1 : La mesure de la longueur de la piste est-elle juste ?

Hussein BOLT est encore l'homme le plus rapide sur 100 m avec un record du monde détenu depuis 2009 en 9,58 s. Pour qu'un tel record soit validé par les instances sportives, il faut que le chronomètre et la longueur de la piste soient homologués par les instances compétentes.

Quel est l'instrument le plus approprié pour vérifier la longueur de la piste ?



Piste du lycée



Partie 1 : Les instruments disponibles

Plusieurs instruments sont disponibles : le décamètre (ruban de longueur 20 m, 30 m ou 50 m), le télémètre laser et l'odomètre.

Décamètre : le ruban est déroulé entre deux points. Le premier point est celui de référence et le second est le point de mesure. On lit la valeur mesurée directement sur le ruban au point de mesure souhaité.

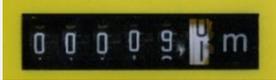
Télémètre Laser : une cible est placée à une distance que l'on cherche à mesurer. Le télémètre envoie un faisceau lumineux vers la cible. Le faisceau est réfléchi et reçu par le télémètre. La valeur mesurée est affichée numériquement sur le télémètre. Certains télémètres disposent de viseur numérique (caméra numérique) pour faciliter le pointage du faisceau Laser sur la cible. Sans viseur numérique il est difficile de mesurer des longueurs supérieures à 20 m en plein jour.

Odomètre : une roue en contact avec le sol tourne. Il faut déplacer l'odomètre en ligne droite, entre les deux points qui séparent la distance que l'on souhaite mesurer.



Partie 2 : Les caractéristiques des instruments, les méthodes de mesure et les mesures réalisées

1. Indiquer dans le tableau des instruments de mesure ci-dessous la méthode de mesure pour chaque instrument.
2. On appelle résolution la plus petite variation de la valeur affichée. Déterminer pour chaque instrument la résolution de l'instrument de mesure et compléter le tableau.

DOCUMENT 1 : Les instruments de mesure				
Instruments de mesure	Décamètre 	Télémètre 1 	Télémètre 2 	Odomètre 
Caractéristiques	Longueur du ruban : Lecture analogique	Portée : 200 m Viseur numérique avec zoom 4x Lecture numérique	Portée : 60 m Pas de viseur numérique Lecture numérique	Lecture analogique 
Méthode de mesure				
Résolution				
Valeurs mesurées	Essai 1 : Essai 2 : Essai 3 :	Essai 1 : Essai 2 : Essai 3 :	Essai 1 : Essai 2 : Essai 3 :	Essai 1 : Essai 2 : Essai 3 :

**Partie 3 : A la recherche de l'instrument le plus approprié**

3. Classer les instruments du plus approprié au moins approprié pour cette mesure.
4. Réaliser la mesure de la piste à l'aide du matériel proposé par le professeur. Effectuer plusieurs mesures.
5. Recopier vos valeurs mesurées ainsi que celles de tous vos camarades dans le tableau collaboratif.
6. Classer les instruments du plus approprié au moins approprié en justifiant votre choix. Cela confirme-t-il le classement de la question 3?
7. Calculer l'étendue de la série de mesures.
8. On souhaite construire un histogramme. Comme l'étendue de la série de valeurs est importante, il est préférable d'arrondir chaque valeur au nombre entier le plus proche pour réduire le nombre de valeurs de longueur différentes.
Arrondir chaque valeur de la série de mesures à la valeur entière la plus proche.
9. Construire un histogramme représentant le nombre de mesures comprises dans l'intervalle (en math on parle de l'effectif) en fonction des différents valeurs arrondies de longueur.
10. Repérer les valeurs qui vous semblent anormales.
11. Proposer plusieurs manières d'exprimer le résultat de mesure de la longueur de la piste en tenant compte des réponses précédentes.
12. Les mesures réalisées permettent-elles d'accéder à la valeur vraie de la longueur de la piste?

Partie 4 : Expression du résultat de mesure

13. A l'aide de l'histogramme, calculer la moyenne pondérée des valeurs à l'aide de l'aide n°1. Comparer à la valeur moyenne arithmétique.
14. Calculer l'écart-type de la série de mesures à l'aide de l'aide n°2 si nécessaire. Comparer la valeur calculée à la valeur calculée par Excel ou la calculatrice.
15. Proposer une autre manière d'exprimer le résultat de la mesure.

Aide 1 : Moyenne pondérée d'une série de mesures

On suppose que l'on a p valeurs différentes (g_1 à g_p) de la grandeur G . On note n_1 le nombre de valeurs de la grandeur G dont la valeur est g_1 , n_2 le nombre de valeurs de la grandeur G dont la valeur est g_2 , ..., n_p le nombre de valeurs de la grandeur G dont la valeur est g_p . Le nombre total de valeurs est N avec $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$.

La moyenne pondérée de la grandeur est :

$$g_{moyen} = \frac{n_1 g_1 + n_2 g_2 + \dots + n_p g_p}{N}$$

Aide 2 : Ecart-type expérimental d'une série de mesures

C'est un indicateur qui représente en quelque sorte la valeur moyenne des écarts des valeurs de la série de mesures par rapport à la valeur moyenne.

On suppose que l'on a p valeurs différentes (g_1 à g_p) de la grandeur G . On note n_1 le nombre de valeurs de la grandeur G dont la valeur est g_1 , n_2 le nombre de valeurs de la grandeur G dont la valeur est g_2 , ..., n_p le nombre de valeurs de la grandeur G dont la valeur est g_p . Le nombre total de valeurs est N avec $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$.

L'écart-type expérimental est donné par la relation :

$$s = \sqrt{\frac{n_1(g_1 - g_{moyen})^2 + n_2(g_2 - g_{moyen})^2 + \dots + n_p(g_p - g_{moyen})^2}{N - 1}}$$

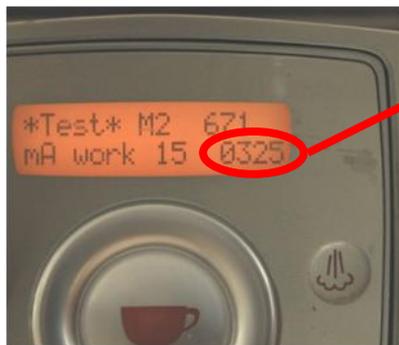
ACTIVITÉ 2 : L'ampèremètre de mon lycée donne-t-il la valeur vraie ?

DOCUMENT 1 : robot électroménager

Certains robots électroménagers, comme les machines à café automatiques, sont équipés de moteurs électriques. Ces moteurs permettent à la machine d'effectuer des tâches complexes.

Un moteur de machine à café peut par exemple convoyer la poudre de café et la comprimer avant l'injection de vapeur. Au cours de la compression, l'intensité du courant qui traverse le bobinage du moteur augmente.

Afin de protéger le moteur, le fabricant a prévu une mesure permanente de l'intensité du courant par un ampèremètre numérique. Au-delà d'une certaine intensité du courant électrique, le moteur s'arrête pour éviter la surchauffe du bobinage.



Valeur de l'intensité du courant en mA

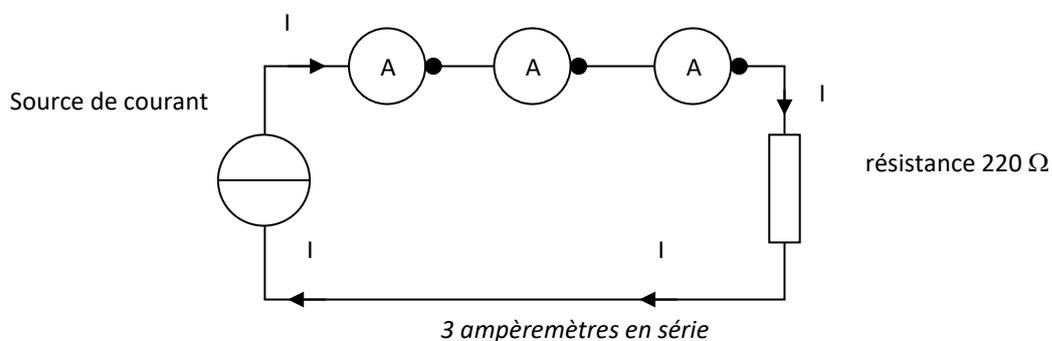
Moteur d'une machine à café en test

Pour respecter le cahier des charges du constructeur du moteur électrique, on souhaite choisir un ampèremètre capable de donner la valeur vraie de l'intensité du courant électrique.

Tous les instruments donnent-ils la valeur vraie de l'intensité du courant électrique ?

Pour répondre à la question on réalise un circuit électrique en série comprenant un conducteur ohmique (modélisant le moteur électrique), un générateur de courant et 3 ampèremètres en série.

Partie 1 : Mesure de l'intensité du courant électrique avec 3 ampèremètres



1. Sans réaliser de mesures, que peut-on dire de l'intensité du courant électrique en tout point du circuit en série ?
2. Sans réaliser de mesures, que peut-on prévoir pour les trois valeurs de l'intensité électrique affichées par chacun des ampèremètres ?



3. Réaliser les mesures de l'intensité du courant dans le circuit série. Le générateur de courant délivre une intensité environ égale à 3,5 mA.

	Multimètre 1	Multimètre 2	Multimètre 3
Intensité en mA			

4. Les résultats sont-ils conformes aux prévisions de la question 2 ?
A partir de vos mesures, proposer une valeur unique qui vous semble représentative de l'intensité du courant électrique.
Calculer l'écart-type de la série de 3 valeurs.

Partie 2 : Mesure avec des ampèremètres de meilleure qualité

On rajoute dans le circuit 3 autres ampèremètres de meilleure qualité en série.

5. Réaliser les mesures et compléter le tableau suivant :

	Multimètre 4	Multimètre 5	Multimètre 6
Intensité en mA			

6. Calculer la valeur moyenne de la nouvelle série de mesures et l'écart-type correspondant.
7. Pourquoi peut-on dire que ces ampèremètres sont de meilleure qualité ?
8. Reporter sur un axe gradué les 6 valeurs obtenues par chacun des 6 multimètres.
9. Les mesures réalisées permettent-elles d'obtenir la valeur vraie de l'intensité du courant électrique ? Les mesures réalisées par les deux familles de multimètres sont-elles compatibles entre elles ?
10. On rajoute dans le circuit un instrument de très haute qualité. Cet appareil destiné au contrôle des autres instruments fournit une **valeur de référence** qui est proche de la valeur vraie.
Lorsque les valeurs de la grandeur mesurée sont faiblement dispersées, on dit que la mesure est fidèle.
La mesure est d'autant plus juste que la valeur de la grandeur mesurée est proche de la valeur de référence.
Comparer les fidélités et justesses des deux familles de multimètres.

Partie 3 : Utilisation des données constructeur

Les résultats de mesure obtenus avec les deux familles de multimètre ne semblent pas compatibles alors que chaque fabricant garantit les mesures de son instrument.

Il existe des sources d'erreur qui ne sont pas « visibles » par l'expérimentateur lorsqu'il réalise les mesures. Seul le fabricant les connaît et sait les estimer. Il fournit dans son livret utilisateur une estimation de l'étendue des valeurs possibles de la valeur vraie sous la forme d'un intervalle. On détermine la demi-étendue de l'intervalle à l'aide d'une **formule d'évaluation**. Les fabricants utilisent d'ailleurs un vocabulaire qui n'est pas forcément le même tout le temps. On peut rencontrer les termes de précision, justesse... Il faut retenir que la **demi-étendue ne correspond pas à l'incertitude-type**.

L'estimation de l'incertitude-type se déduit de l'intervalle donné par le fabricant mais sa détermination est complexe. Elle peut cependant se déterminer simplement à l'aide d'une simulation (voir activité 3). Le fabricant garantit que la valeur vraie appartient à l'intervalle dont la demi-largeur est donnée dans le livret utilisateur.

Pour déterminer cet intervalle, on utilise la règle suivante:



- On lit la valeur centrale sur le multimètre. Par exemple $I = 3,502 \text{ mA}$.
- Le constructeur du MX22 nous dit que la demi-étendue est égale par exemple à :

$$\text{Demi-étendue} = 1\% \text{ de la lecture} + 3 q$$

(q est le quantum de l'appareil, c'est-à-dire la plus petite variation de la valeur affichée sur le calibre utilisé)

Pour le MX 53, le constructeur donne : **0,2% de la lecture + 2 q**

11. Pour les mesures réalisées avec un des appareils de chacune des 2 familles d'ampèremètres, effectuer les calculs nécessaires et remplir le tableau suivant:

	MX22-1	MX53-1
I_{centrale}		
Demi-étendue		
$I_{\text{inférieur}}$		
$I_{\text{supérieur}}$		

12. Comparer les demi-étendues données par le fabricant aux écart-types estimés aux questions 4 et **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** et justifier pourquoi il n'est pas nécessaire de réaliser une série de mesures et qu'une mesure unique réalisée avec un seul multimètre suffit.
13. Tracer les 6 intervalles correspondant aux 6 multimètres sur un graphe.
14. Pourquoi peut-on alors dire que les mesures des 6 multimètres utilisés sont finalement compatibles ?



ACTIVITÉ 3 : Estimation de l'incertitude-type de mesure dans le cas d'une mesure unique

Le constructeur d'un instrument de mesure connaît les sources d'erreur de son instrument puisqu'il en est le concepteur. Il fournit ainsi aux utilisateurs une notice indiquant la demi-étendue des valeurs possibles que l'on peut attribuer à la valeur de la grandeur mesurée. Dans les notices cette demi-étendue porte le nom de termes peu conventionnels comme « précision », « justesse », mais **elle ne correspond pas l'incertitude-type**.

On se propose dans cette activité de déterminer l'incertitude-type de mesure en utilisant un outil de simulation.

On mesure une tension à l'aide d'un multimètre MX22. La valeur affichée est **3,853 V**.

1. A l'aide de l'extrait de la notice du constructeur ci-dessous, calculer la demi-étendue des valeurs possibles de la tension notée demi-étendue.

TECHNICAL CHARACTERISTICS	MX 26	MX 24B	MX 23	MX 22
• DC voltages				
Ranges	0.5 - 5 - 50 - 500 1,000 V	0.5 - 5 - 50 - 500 1,000 V	0.5 - 5 - 50 - 500 1000 V	40 - 400 mV 4 - 40 - 400 - 600 V
Resolution	0.1 mV to 1 V	0.1 mV to 1 V	0.1 mV to 1 V	0.01 mV to 1 V
Basic accuracy*	0.3% rdg + 2 digits	0.3% rdg + 2 digits	0.3% rdg + 2 digits	0.3% rdg + 2 digits
Input impedance	10 MΩ (11 MΩ/ 5V)	10 MΩ (11 MΩ/ 5V)	10 MΩ (11 MΩ/ 5V)	1.5 MΩ (40 mV) 40 MΩ (400 mV) 8 MΩ
Protection	±1,100 VPEAK 775 VRMS	±1,100 VPEAK (600 VRMS/0.5 V)	±1,100 VPEAK (600 VRMS/0.5 V)	600 VRMS

Extrait de la notice constructeur

2. Déterminer les valeurs minimale et maximale de l'intervalle garanti par le fabricant du multimètre.

Le fabricant garantit que la valeur vraie appartient à l'intervalle précédent et aucune valeur de l'intervalle n'est plus probable qu'une autre. Autrement dit, la valeur vraie peut être la valeur minimale, ou la valeur maximale ou la valeur moyenne ou toutes les autres. Comme la valeur vraie de l'intensité peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle, on va utiliser un générateur de nombres aléatoires dans l'intervalle pour obtenir une série de valeurs de l'intensité (chacune pouvant être égale à la valeur vraie) afin de calculer l'écart-type correspondant.

La simulation va donc consister à prélever un échantillon de 1000 valeurs dans l'intervalle, de manière aléatoire, et de calculer l'écart-type de cet échantillon.

3. Ouvrir l'**utilitaire d'analyse d'Excel** puis le **générateur de nombres aléatoires**.

Génération de nombres aléatoires

① Fixer le nombre de valeurs à 1000

② Choisir la distribution uniforme

③ Saisir les valeurs minimale et maximale de l'intervalle

④ Préciser la plage de sortie (une cellule unique)

Générateur de nombres aléatoires



Réaliser les étapes ① à ④ puis valider pour générer les 1000 valeurs.

4. Calculer la valeur moyenne de l'échantillon et vérifier qu'il correspond à la valeur de la grandeur mesurée par le multimètre.

Calculer l'écart-type s des 1000 valeurs.

5. Un calcul complexe donne la relation entre l'incertitude-type et la demi-étendue du fabricant (**cette relation n'est pas à retenir, elle sera donnée !**) :

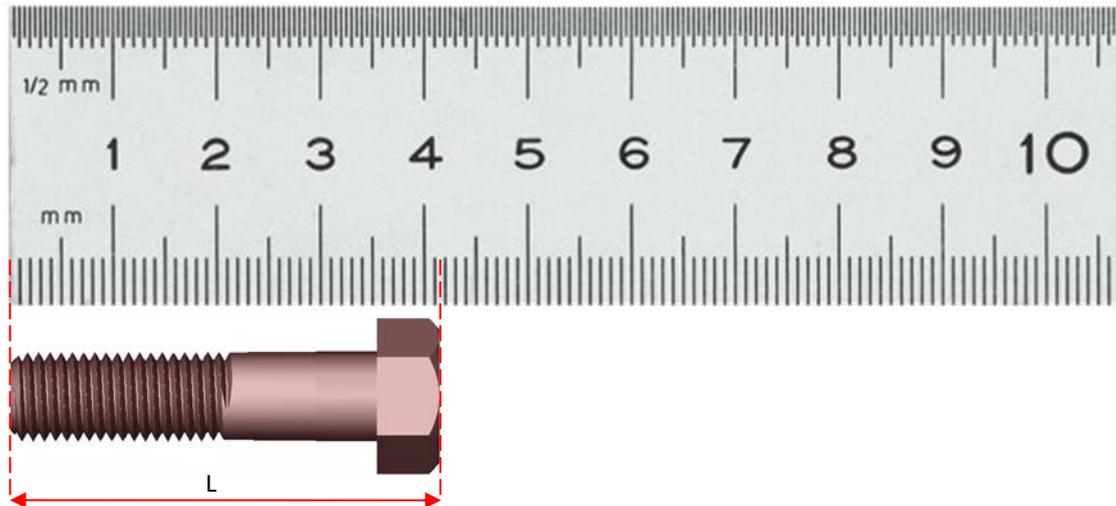
$$u(U) = \frac{\text{demi-étendue de } U}{\sqrt{3}}$$

Vérifier que l'écart-type déterminé précédemment correspond à l'incertitude-type calculée à l'aide de la formule ci-dessus.



ACTIVITÉ 4 : Estimation de l'incertitude-type dans le cas de lecture sur une échelle graduée

Dans cette activité, on souhaite estimer l'incertitude-type de mesure de longueur avec une règle graduée. On mesure la longueur d'une vis (document ci-dessous).



Mesure de la longueur d'une vis

Partie 1 : Estimation de la longueur et recherche des sources d'erreur

1. A l'aide du document ci-dessus, estimer la longueur de la vis.
2. Rechercher les sources d'erreur de mesure de longueur de la vis.
3. On appelle résolution d de la règle la plus petite graduation. Déterminez la résolution d de la règle.
4. Donner un intervalle raisonnable de la position de la tête de vis par rapport à l'échelle graduée de la règle.
5. L'alignement de l'autre extrémité de la vis avec le « zéro » de l'échelle graduée n'est pas parfait. Proposer une valeur de l'erreur maximale liée à cette source d'incertitude.

Partie 2 : Utilisation d'un outil de simulation pour déterminer l'incertitude-type de la longueur

Comme il existe deux sources d'erreur de mesure de longueur liées à l'utilisation de l'échelle graduée, nous allons considérer que la longueur de la règle se détermine par une différence de position (entre la position de la tête de vis et la position de l'autre extrémité). Comme la valeur vraie de chaque position peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle, on va utiliser un générateur de nombres aléatoires dans chaque intervalle pour obtenir des séries de nombres afin de calculer l'écart-type correspondant.

Nous allons générer 1000 nombres de manière aléatoire appartenant à chacun des intervalles proposés aux questions 4 et 5 de la partie 1.

6. Ouvrir l'utilitaire d'analyse d'Excel puis le générateur de nombres aléatoires.



Génération de nombres aléatoires ? X

Nombre de variables: 1 OK

Nombre d'échantillons générés: 1000 Annuler

Distribution: Uniforme Aide

Paramètres

Entre 0 et 1

Entier générateur:

Options de sortie

Plage de sortie: \$D\$9

Insérer une nouvelle feuille:

Créer un nouveau classeur

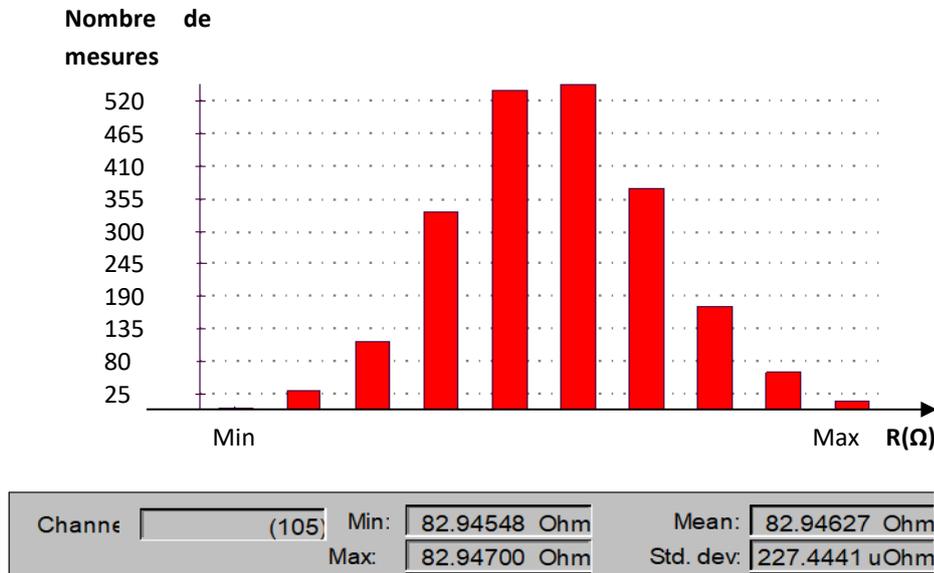
Générateur de nombres aléatoires

7. Fixer le nombre de valeurs aléatoires générés à 1000, une distribution uniforme (cela signifie que le tirage au sort est équiprobable sur tout l'intervalle) et fixer les paramètres correspondant aux valeurs minimale et maximale de l'intervalle pour la première position (correspondant à la tête de vis) puis préciser la plage de sortie.
8. Créer une deuxième colonne de nombres aléatoires pour la deuxième position (correspondant à l'autre extrémité de la tête de vis), à côté de la première colonne.
9. Pour chaque ligne, calculer la longueur correspondant à la différence des deux positions.
10. Calculer l'écart-type de la série des 1000 valeurs de longueurs calculées.
11. En déduire une expression simple de l'incertitude-type de longueur en fonction de la résolution d de la règle.
12. Donner la résolution d de l'échelle graduée supérieure de la règle et calculer l'incertitude-type de longueur correspondante.



ACTIVITÉ 5 : Estimation de l'incertitude-type de la valeur moyenne d'une série de mesures

On réalise la mesure d'une résistance à l'aide d'un instrument enregistreur de données. Lors d'une première expérience on réalise 2000 mesures successives de la résistance. On obtient l'histogramme suivant du nombre de mesures effectuées par classe (l'intervalle total des valeurs étant divisé en 10 classes).



On souhaite déterminer les meilleurs estimateurs pour la valeur de la grandeur mesurée et l'étendue des valeurs possibles attribuées à la valeur vraie lorsque l'on réalise une série de plusieurs mesures.

1. A l'aide des valeurs minimale et maximale de la série de valeur, calculer la valeur centrale de l'intervalle. Comparer la valeur centrale à la valeur moyenne. Pourquoi peut-on dire que la valeur moyenne est le meilleur estimateur de la grandeur mesurée ?

Pour déterminer l'étendue des valeurs que l'on peut attribuer à la grandeur mesurée, on réalise 3 nouvelles expériences. Pour chaque expérience, on réalise 10 séries de **N** mesures, n étant différent pour chaque expérience. Les résultats des 3 expériences sont regroupés dans le tableau ci-dessous. Les valeurs du tableau sont en ohm

	Série	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Expérience 1 N = 10	moyenne	82,94620065	82,946177	82,9462225	82,946213	82,9462356	82,9462848	82,946291	82,9462798	82,9462245	82,9463822
	Ecart-type	0,000157914	0,00026651	0,00024176	0,00025124	0,00012094	0,00020401	0,00016419	0,0001793	0,00016605	0,00026166
Expérience 2 N = 100	moyenne	82,94626079	82,9462953	82,9462535	82,9462998	82,9462574	82,9462786	82,9462502	82,9462585	82,9462378	82,9462541
	Ecart-type	0,000246915	0,00021762	0,00024564	0,00021623	0,00022803	0,00022771	0,00023145	0,00021605	0,00023286	0,00023083
Expérience 3 N = 1000	moyenne	82,94626613	82,9462821	82,9462715	82,9462741	82,9462589	82,9462812	82,9462632	82,9462607	82,9462691	82,946269
	Ecart-type	0,000232138	0,00023472	0,00023081	0,0002242	0,00023216	0,00022423	0,00023359	0,00022719	0,00023732	0,00022505

2. Tracer la courbe représentative de la valeur moyenne en fonction du numéro de la série pour l'expérience 1. Superposer alors les courbes des expériences 2 et 3. Faire de même avec l'écart-type.



3. Expliquer pourquoi la **fiabilité** de la **moyenne** comme **estimateur** de la grandeur mesurée est meilleure lorsque le nombre de mesures est élevé.
Calculer pour chaque expérience la moyenne des valeurs moyennes. Comparer les 3 moyennes obtenues.
4. Expliquer pourquoi la **fiabilité** de **l'écart-type** comme **estimateur** de l'étendue des valeurs que peut prendre la résistance est meilleure lorsque le nombre de mesures est élevé.
Calculer pour chaque expérience la moyenne des écart-types notée s_1 . Comparer les 3 moyennes obtenues.
5. Pour chaque expérience, calculer l'écart-type des valeurs moyennes noté s_{moy} .
Vérifier pour chaque expérience la relation suivante :

$$s_{moy} = \frac{s_1}{\sqrt{N}}$$