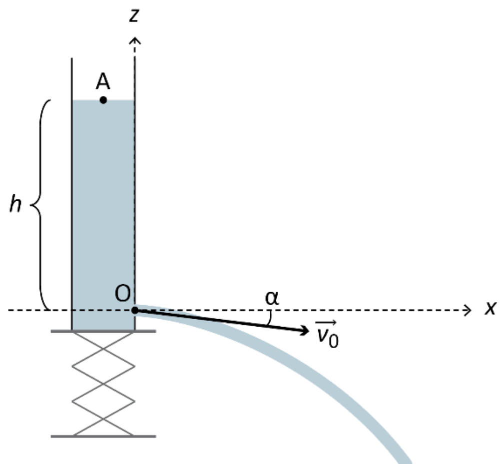
Mesures et incertitudes : activité pour les élèves
Mesures d'une vitesse d'écoulement

Cette activité est adossée au programme de la spécialité SPCL de la classe de terminale STL et particulièrement sur celui de la partie « Systèmes et procédés ». Elle mobilise également des notions abordées dans les chapitres de mécanique de la spécialité « Physique-chimie et mathématiques » de la classe de 1ère.
L'objectif est d'illustrer les limites de la relation de Torricelli, elle-même conséquence de la relation de Bernoulli appliquée à un fluide parfait. Le résultat de cette relation est comparé à celui donné par une méthode supposée beaucoup plus fiable.

Objectif de l'activité

On étudie dans cette activité un jet d'eau, obtenu à l'aide d'une grande colonne d'eau percée en bas. La figure ci-dessous introduit les notations qui seront utilisées dans toute l'activité.



Le but est de déterminer la vitesse initiale du jet d'eau de deux manières :
- → à l'aide de la relation de Torricelli (que nous commencerons par établir) ;
- → à l'aide de la trajectoire du jet une fois sorti de la colonne.

En admettant que la 2nde méthode soit beaucoup plus fiable et fournisse une valeur de référence, nous pourrons comparer les deux résultats et en déduire une étude critique de la relation de Torricelli appliquée dans ce cas.

1. Détermination de v_0 à l'aide de la relation de Toricelli

1.1. Étude théorique : la relation de Torricelli

On rappelle que dans le cas d'un fluide parfait (sans viscosité) ne subissant aucune perte de charge lors de son écoulement, la relation de Bernoulli énonce que la quantité suivante est constante :

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p = \text{constante}$$

ρ étant la masse volumique du fluide, v sa vitesse d'écoulement, z son altitude par rapport à une référence donnée, p sa pression et $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ le champ de pesanteur terrestre.

1. Appliquer la relation de Bernoulli entre les points A (surface de l'eau dans la colonne) et O (sortie de la colonne, point de départ du jet d'eau). En admettant que la vitesse v_A au point A soit négligeable devant v_0, simplifier cette relation en éliminant tous les termes qui peuvent l'être.
2. En déduire l'expression suivante de la vitesse de l'eau au départ du jet :
$$v_0 = \sqrt{2gh}$$
Cette relation est connue sous le nom de « relation de Torricelli » : c'est elle que nous allons mettre à l'épreuve de l'expérience.

1.2. Mesure de v_0 à l'aide de la relation de Torricelli

Travail expérimental : mesure de h sur l'une des photos

- Ouvrir le logiciel Salsa J : c'est une application permettant le traitement des images.
- Sous Salsa J : ouvrir la photo du jet d'eau portant le numéro que vous a attribué l'enseignante ou l'enseignant.
- Avec l'outil « ligne », sélectionner un segment correspondant aux 30 cm de la règle collée à la cuve.
- Cliquer sur « analyse » puis « indiquer l'échelle » ; dans la fenêtre qui s'ouvre, saisir « 30 » dans la zone de saisie « distance réelle ». L'écran est désormais étalonné en longueur.
- Sélectionner un segment correspondant à la hauteur d'eau au-dessus du départ du jet et noter la valeur h obtenue (bien choisir la longueur en cm, pas celle en pixels !).

Exploitation : calcul de v_0

3. Exploiter la relation de Torricelli et la mesure précédente de h pour calculer la valeur, que nous noterons « $v_{0\ \mathrm{Tor}}$ », de la vitesse initiale du jet d'eau.
4. On admet que l'incertitude-type de la hauteur d'eau mesurée vaut $u(h) \approx 5\ \mathrm{mm}$ (compte-tenu de la qualité des photos…). L'incertitude-type de la vitesse calculée à partir de la relation de Torricelli peut être évaluée par la relation :
$$u(v_{0\ \mathrm{Tor}}) = \frac{v_0}{2}\frac{u(h)}{h}$$
5. Évaluer $u(v_{0\ \mathrm{Tor}})$ en conservant deux chiffres significatifs.
6. Dans le tableau partagé affiché dans la salle, saisir la valeur de h : v_0 et $u(v_0)$ se calculent automatiquement, ce qui permet une vérification des résultats.
7. Lorsque tous les élèves ont saisi leur valeur, commenter l'évolution de $v_{0\ \mathrm{Tor}}$ au cours du temps (sachant que les photos sont classées dans l'ordre chronologique) et vérifier qualitativement que cette évolution est cohérente.

2. Obtention d'une valeur de référence de v_0

Nous allons à présent déterminer la vitesse initiale du jet en exploitant sa trajectoire. Nous admettons que cette seconde méthode est beaucoup plus fiable que celle reposant sur la relation de Torricelli : pour cette raison la valeur que nous obtiendrons sera considérée comme « de référence » et sera notée : $v_{0\ \mathrm{ref}}$.
Dans le repère défini sur le schéma du préambule, on montre à l'aide des lois de Newton que la trajectoire du jet d'eau s'exprime comme celle d'un projectile avec vitesse initiale :
$$z(x) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 + \tan(\alpha)\ x$$

Travail expérimental

- Avec un logiciel de pointage vidéo, ouvrir la même photo que précédemment en utilisant l'outil habituellement dédié aux vidéos. Si une durée entre deux images est demandée, saisir une valeur au hasard (puisque ce n'est pas un film et que notre but n'est pas de faire une étude temporelle).
- Étalonner l'écran, placer soigneusement l'origine du repère comme sur le schéma du préambule.
- Pointer une dizaine de points régulièrement répartis le long de la trajectoire du jet.
- Représenter graphiquement z en fonction de x et modéliser le résultat par une fonction « parabole » (c'est-à-dire polynôme de degré 2). Noter l'équation de la courbe obtenue en conservant tous les chiffres affichés.

Exploitation : obtention d'une seconde valeur de v_0

8. Exploiter l'équation de la courbe pour calculer $\tan(\alpha)$. En déduire la valeur de $\cos^2(\alpha)$.
9. Exploiter l'équation de la courbe pour calculer $v_{0\ \mathrm{ref}}$.
10. Dans le tableau partagé affiché dans la salle, saisir les valeurs des deux premiers coefficients de l'équation de la parabole donnée par le logiciel : $\tan(\alpha)$, $\cos^2(\alpha)$ et v_0 se calculent automatiquement, ce qui permet une vérification des résultats.

3. Comparaison des deux valeurs de v_0

Pour chaque photo (c'est-à-dire pour plusieurs niveaux d'eau restante dans la colonne) nous disposons de deux valeurs de v_0, dont la seconde est supposée être une référence.

L'enseignante ou l'enseignant affiche le second onglet de la feuille de calcul. Il s'agit d'un diagramme en bâtons qui rassemble les résultats obtenus par la classe dans la partie précédente :

→ en abscisse est porté le numéro de la photo ;
→ les bâtons bleus représentent les valeur de v_0 obtenues à l'aide de la formule de Torricelli ;
→ les bâtons jaunes représentent les valeurs « de référence » obtenues à l'aide de la trajectoire du jet d'eau.

11. Sans faire de calcul, observer les deux séries de mesures de v_0 et indiquer s'il semble possible que les écarts entre les deux valeurs obtenues pour chaque photo puissent être uniquement la conséquence des incertitudes de mesure.

L'enseignante ou l'enseignant affiche le troisième onglet de la feuille calcul. Il s'affiche un diagramme en bâton qui représente :

→ en abscisse le numéro de la photo
→ en bleu foncé : l'incertitude-type de la valeur de v_0 obtenue par Torricelli ;
→ en bleu clair l'écart entre la valeur « Torricelli » et la valeur de référence.

12. Montrer que ce nouveau graphique confirme la réponse 11. Un argument quantitatif est attendu, basé sur les informations extraites du document 1.

13. Donner au moins un argument physique qui explique que la relation de Torricelli surestime la valeur de la vitesse initiale du jet d'eau. On pourra pour cela reprendre les étapes qui nous ont amenés, dans la première partie, à cette relation.

DOCUMENT 1 : comparaison d'un résultat de mesure à une valeur de référence

Une valeur de référence x_{ref} d'une grandeur x est une valeur supposée avoir une incertitude beaucoup plus faible que la valeur mesurée x_{mes} à laquelle on la compare.
On considère que la valeur mesurée est compatible avec la valeur de référence si leur différence (en valeur absolue) est inférieure au double de l'incertitude-type, soit :

$$|x_{\text{mes}} - x_{\text{ref}}| \leq 2 \times u(x_{\text{mes}})$$