Mesures et incertitudes : fiche pour le professeur

Plusieurs sources d'erreur sur une même grandeur : la composition des incertitudes

Comment évaluer l'incertitude d'une grandeur mesurée avec plusieurs sources d'erreur ?

Préambule : la multiplicité des sources d'erreur, une difficulté à contourner

Les programmes des spécialités PCM et SPCL de la série STL indiquent, en 1ère : « *Procéder à une évaluation de type B d'une incertitude-type **pour une source d'erreur** en exploitant une relation fournie et/ou les notices constructeurs.* ». En classe de terminale, le programme ajoute : « *Évaluer, à l'aide d'une relation fournie ou d'un logiciel, l'incertitude-type d'une mesure obtenue lors de la réalisation d'un protocole dans lequel interviennent **plusieurs sources d'erreurs**.* » Cet ajout autorise à tenir compte de plusieurs sources d'erreur sur une grandeur mesurée mais en classe de première c'est hors programme. Or les situations dans lesquelles une mesure est réalisée avec une seule source d'erreur sont très rares au lycée. Par exemple un simple prélèvement de solution avec une verrerie graduée ou jaugée fait intervenir de multiples sources d'erreur : la tolérance de l'instrument, son éventuelle résolution, la variabilité de la température, et, bien sûr, la lecture par l'opérateur. Dès lors, comment évaluer correctement l'incertitude avec des lycéens de 1ère lorsqu'ils réalisent une mesure unique ?
Cette fiche donne quelques éléments sur ce qu'il faudrait faire au plan métrologique, puis donne quelques pistes pour s'en sortir avec des lycéens de 1ère et de terminale dans le respect des programmes.

La composition des incertitudes

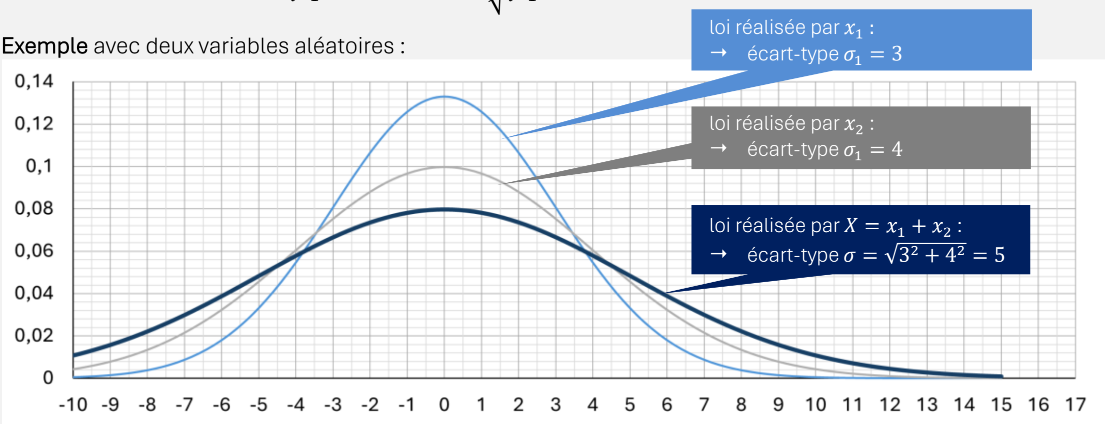
Lorsque plusieurs sources d'erreur affectent une même mesure, il faut **composer** leurs incertitudes associées. Les lois à utiliser résultent alors des propriétés des sommes de variables aléatoires, dont nous résumons quelques résultats utiles ci-dessous.

Somme de variables aléatoires

Soit x_1, x_2, …, x_N des variables aléatoires **indépendantes** réalisant des lois de probabilité d'espérance μ et d'écarts-types σ_1, σ_2, …, σ_N.
Si X est la somme de ces variables aléatoires, alors elle réalise une loi de probabilité d'espérance μ et d'écart-type σ tel que :

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2} \qquad \text{(additivité des variances)}$$

Exemple avec deux variables aléatoires :



Composition des incertitudes-types

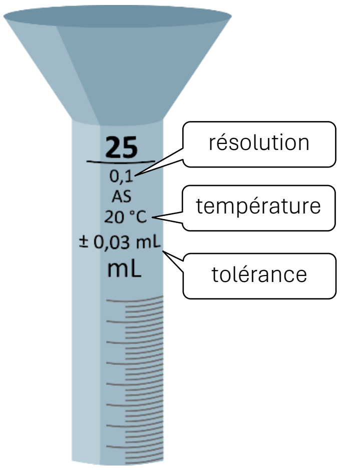
L'incertitude-type caractérise **les erreurs aléatoires**. Composer les incertitudes-types lorsque plusieurs sources d'erreur affectent un résultat de mesure revient alors à additionner les variances associées.

Les relations à utiliser résultent donc de l'additivité des variances mentionnée plus haut. La démarche à suivre est la suivante :

- → Faire l'inventaire des sources d'erreur et associer à chacune d'elle une demi-étendue (indication du fabricant, graduation, etc.).
- → Calculer l'écart-type associé à chaque source d'erreur, en fonction de la loi de probabilité supposée réalisée.
- → L'incertitude-type de la grandeur mesurée est évaluée par la relation :

$$u(x) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \cdots}$$

Exemple : mesure d'un volume avec une burette graduée de classe AS



Considérons 3 sources d'erreur : la résolution de l'instrument, la tolérance fabricant et la variabilité de la température. Supposons que la température varie de 3°C maximum par rapport aux 25°C préconisés par le fabricant.

Source d'erreur	demi-étendue	écart-type
résolution	demi-graduation : $\frac{0{,}1}{2} = 0{,}05\ \mathrm{mL}$	loi uniforme $\sigma_1 = \frac{0{,}05}{\sqrt{3}} = 0{,}029\ \mathrm{mL}$
tolérance	indication fabricant : $0{,}03\ \mathrm{mL}$	loi triangulaire $\sigma_2 = \frac{0{,}03}{\sqrt{6}} = 0{,}012\ \mathrm{mL}$
température	variation de volume de 25 mL d'eau lorsque la température varie de 3°C : $0{,}016\ \mathrm{mL}$	loi uniforme $\sigma_3 = \frac{0{,}016}{\sqrt{3}} = 0{,}0092\ \mathrm{mL}$

Finalement l'incertitude-type du volume prélevé est évaluée à :

$$\begin{aligned} u(V) &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \\ &= \sqrt{0{,}029^2 + 0{,}012^2 + 0{,}0092^2} \\ &= \mathbf{0,033\ mL} \end{aligned}$$

Que faire avec les élèves ?

En classe de première

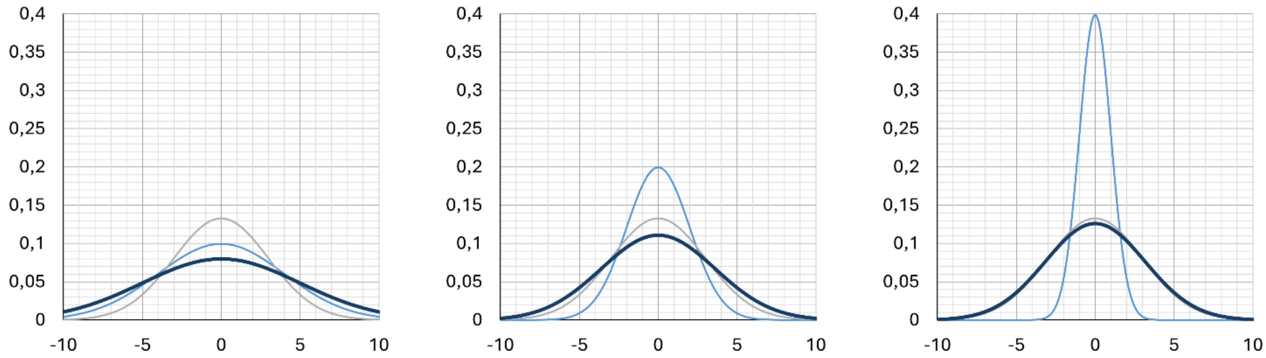
En classe de première le programme exclut la composition des incertitudes. Il faut donc n'évaluer les incertitudes avec une méthode de type B que lorsque :

- → il n'y a qu'une seule source d'erreur (exemple : mesure de distance avec une règle graduée) ;
- → l'une des sources d'erreur est « nettement » majoritaire : dans ce cas on négligera les autres.

Reste à définir ce que l'on entend par source d'erreur « nettement majoritaire » : nous y revenons dans la suite de cette fiche.

Parenthèse : qu'est-ce qu'une source d'erreur « nettement majoritaire » ?

On a tracé ci-dessous la loi de probabilité (normale) associée à deux variables aléatoires (en gris et en bleu clair) et celle de leur somme (en gras), pour plusieurs valeurs d'écarts-types :



— écart-type $\sigma_1 = 4$
— écart-type $\sigma_2 = 3$
— écart-type $\sigma = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

— écart-type $\sigma_1 = 2$
— écart-type $\sigma_2 = 3$
— écart-type $\sigma = \sqrt{2^2 + 3^2} \approx 3{,}6$

— écart-type $\sigma_1 = 1$
— écart-type $\sigma_2 = 3$
— écart-type $\sigma = \sqrt{1^2 + 3^2} \approx 3{,}2$

Le second graphique montre qu'il suffit que σ_2 soit deux fois supérieur à σ_1 pour que la somme des deux variables réalise une loi de probabilité très proche de celle d'écart-type σ_2.

Cela montre que si une source d'erreur a un écart-type associé au moins trois fois supérieur aux autres, on se trompe très peu en supposant qu'elle est la seule source d'erreur non-négligeable : cela revient à un rapport de 9 entre les variances.

Revenons à l'exemple de la burette graduée.

L'exemple traité précédemment montre que :

→ si l'on tient compte des trois sources d'erreur on obtient $u(V) = 0{,}032 \text{ mL}$

→ si l'on suppose que la résolution est la seuls source d'erreur non-négligeable on obtient $u(V) = 0{,}029 \text{ mL}$, soit seulement 0,003 mL de moins.

Donc si l'enseignant a conduit préalablement cette étude et indique à ses élèves la méthode à suivre pour évaluer $u(V)$ uniquement à partir de la demi-graduation, ceux-ci obtiennent une estimation très correcte de l'incertitude.

En classe de terminale

En classe de terminale la prise en compte de plusieurs sources d'erreur est possible à condition que l'enseignant fournisse la méthode à suivre. Mais nous préconisons de ne pas en abuser, pour plusieurs raisons :

→ c'est rarement indispensable dans les situations courantes au lycée, il est plus riche de rechercher quelle source d'erreur est majoritaire et ne tenir compte que de celle-ci ;

→ c'est très calculatoire, alors que notre priorité doit être de donner du sens aux incertitudes, plus que d'en obtenir les meilleures estimations possibles (l'exemple de la burette graduée évoqué plus haut montre que l'on ne sous-estime que de 9 % l'incertitude du volume en ne tenant compte que de la source d'erreur majoritaire) ;

→ cela peut masquer le fait que les instruments utilisés sont rarement responsables des incertitudes de nos mesures.

Revenons une dernière fois sur le cas de la burette graduée : l'incertitude-type que nous avons évaluée est celle du volume *contenu dans la burette* alors que celle-ci est généralement utilisée pour mesurer un volume équivalent. Celui-ci est déduit d'un changement de couleur, d'une courbe… autant de sources d'erreur qui « écrasent » complètement celle due à la burette et son incertitude-type de 0,03 mL, sachant que le volume d'une goutte d'eau est voisin de 0,05 mL !