Exercices mathématiques / physique-chimie
Radioactivité

EXERCICE 1 : activité d'un échantillon radioactif

L'activité A d'un échantillon radioactif correspond au nombre de désintégrations par seconde. Elle se mesure en becquerel (Bq) au moyen d'un compteur Geiger.

1. QCM : Cocher la bonne réponse
   L'activité A d'un échantillon radioactif à un instant t est lié au nombre de noyaux de cet échantillons par la relation :

   ○ $N(t) = \frac{dA}{dt}(t)$ ○ $A(t) = \frac{dN}{dt}(t)$ ○ $A(t) = -\frac{dN}{dt}(t)$ ○ $N(t) = -\frac{dA}{dt}(t)$

Le polonium 210 est un isotope du polonium (Z = 84), émetteur α, très dangereux pour l'Homme, à tel point qu'il a été utilisé dans certains assassinats politiques.
Le nombre de noyaux d'un échantillon de Polonium 210 potentiellement mortel est donné par la relation :

$$N(t) = 2{,}9 \times 10^{13} \times e^{-0{,}005\,t}$$

avec t en jours.

2. Etablir l'expression donnant l'activité $A(t)$ de l'échantillon en fonction du temps en jours.
3. Calculer l'activité de cet échantillon au bout d'une semaine, en j^{-1} puis en Bq.

EXERCICE 2 : Marie Curie et le radium

En 1902, Marie Curie réussit à isoler 1 dg de chlorure de radium. Si elle avait pu mesurer son activité à l'époque, le compteur Geiger aurait indiqué $4{,}5 \times 10^{14}$ Bq ! L'activité de cet échantillon évolue au cours du temps selon la relation :

$$A(t) = 4{,}5 \times 10^{14} \times e^{-2{,}2\times10^{-6}\times t}$$

Avec t en secondes.

Données :

- masse molaire du chlorure de radium $RaCl_2$: $M = 297\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$

1. Montrer que l'échantillon isolé par Marie Curie contient initialement $N_0 = 2 \times 10^{20}$ noyaux de radium.
2. Montrer que l'activité à la date t peut se mettre sous la forme :
   $$A(t) = -2{,}0 \times 10^{20} \times u'(t) \times e^{u(t)}$$
   On explicitera expressions de $u(t)$ et $u'(t)$.
3. Établir la relation donnant $N(t)$ le nombre de noyaux restant dans l'échantillon à une date t.

On considère que l'échantillon cesse d'être dangereux lorsqu'il ne reste plus que 0,1 % des noyaux initialement présents dans l'échantillon.

4. Calculer au bout de combien de temps l'échantillon de chlorure de radium isolé par Marie Curie aurait cessé d'être dangereux.

EXERCICE 3 : constante radioactive du Césium 137

Le césium 137 est un noyau radioactif émetteur β^- que l'on retrouve dans les déchets des catastrophes nucléaires de Tchernobyl ou de Fukushima.
1 g de césium pur présente une activité de 3,204 TBq (TBq : térabecquerel ; 1 TBq = 10^{12} Bq).
On rappelle que l'activité d'un échantillon décroît selon la loi de décroissance :

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

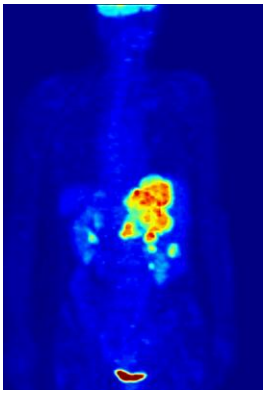
On a mesuré l'activité radioactive d'un échantillon de césium 137 au cours du temps puis calculé son logarithme népérien. Voici les valeurs obtenues :

t (ans)	0	20	40	60	80	100
$\ln(A)$	1,16	0,70	0,24	- 0,22	- 0,68	- 1,14

1. Représenter graphiquement $\ln A(t)$ en fonction du temps. Nommer la courbe que l'on semble obtenir.
2. Établir l'expression de $\ln A(t)$ en exploitant la relation rappelée en introduction.
3. Montrer que l'expression obtenue à la question 2 est cohérente avec la forme du graphique obtenu.
4. Exploiter le graphique pour déterminer la valeur de la constante radioactive λ en an^{-1}.

EXERCICE 4 : tomographie par émission de positons

La tomographie par émission de positons est une technique d'imagerie médicale qui permet de mesurer l'activité métabolique d'un organe grâce aux émissions de positons issues d'un produit radioactif injecté au préalable.



Sur l'image ci-contre on voit que l'isotope radioactif s'est accumulé dans le cerveau, le cœur, la vessie et les reins du patient.

Crédit photo : Jens Maus (domaine public)

Le produit radioactif peut-être de l'eau radioactive où l'atome d'oxygène est l'isotope $^{15}_{8}O$, radioactif β^+, dont la demi-vie vaut : $t_{1/2} = 123\ s$
Pour que l'examen puisse se faire, le nombre de noyaux d'oxygène 15 dans l'organisme doit rester supérieur à 5 % du nombre de noyaux injectés initialement. On cherchera donc à déterminer au bout de combien de temps il reste 6% du nombre de noyaux injectés initialement.

1. Rappeler la définition de la demi-vie ou période radioactive
2. Exprimer le nombre N_1 de noyaux restant au bout d'une demi-vie, en fonction du nombre de noyaux initial N_0.
3. Exprimer le nombre N_2 de noyaux restant au bout de deux demi-vies, en fonction de N_1, puis de N_0.
4. Exprimer le nombre N_3 de noyaux restant au bout de trois demi-vies, en fonction de N_2 puis de N_0.
5. Etablir l'expression du nombre de noyaux restants au bout de n demi-vies en fonction du nombre N_0 initial de noyaux et de n.
6. Résoudre l'équation suivante :

$$\frac{1}{2^x} = 0{,}06$$

7. En déduire au bout de combien de temps il restera 6% des noyaux injectés initialement.

EXERCICE 5 : l'iode 131, un déchet radioactif

L'iode 131 est un noyau radioactif, émetteur β^- que l'on retrouve notamment dans les déchets des catastrophes nucléaires telles que Tchernobyl ou Fukushima.
On donne la constante radioactive de l'iode 131 : $\lambda = 0{,}086\ \text{jour}^{-1}$.
On considère un échantillon d'iode 131 contenant $N_0 = 6 \times 10^{12}$ noyaux.

1. Donner deux expressions différentes de l'activité d'un échantillon d'iode 131.
2. En égalant ces deux expressions, montrer que le nombre de noyaux d'iode 131 $N(t)$ satisfait l'équation différentielle :
$$\frac{dN}{dt}(t) = -0{,}086\, N(t)$$
3. Résoudre l'équation différentielle et établir l'expression du nombre de noyaux d'iode 131 $N(t)$.
4. Montrer que la demi-vie de l'iode 131 peut s'exprimer par la relation
$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$
5. Calculer la demi-vie de l'iode 131.

EXERCICE 6 : l'âge de la Terre (d'après BAC S septembre 2003 Antilles)

La détermination de l'âge de la Terre a commencé vers le XVI^{e} siècle, on l'estimait alors autour de 5 000 ans. Au XIX^{e} siècle, des scientifiques admettaient un âge d'environ 100 millions d'années.
La découverte de la radioactivité, par H. Becquerel en 1896, bouleversa toutes les données connues. La datation à l'uranium - plomb permit de déterminer assez précisément l'âge de la Terre.
Nous proposons de comprendre cette technique de datation.
Les questions de mathématiques sont repérées par un (M).

1ère partie : étude de la famille uranium 238 – plomb 206

Le noyau d'uranium 238, naturellement radioactif, se transforme en un noyau de plomb 206, stable, par une série de désintégrations successives. Nous allons étudier ce processus.
(On ne tiendra pas compte de l'émission γ).
Dans la première étape, un noyau d'uranium $^{238}_{92}U$ subit une radioactivité α. Le noyau fils est du thorium (symbole Th).

1. Écrire l'équation de la réaction nucléaire en précisant les règles utilisées.

Dans la deuxième étape, le noyau de thorium 234 se transforme en un noyau de protactinium $^{234}_{91}\text{Pa}$. L'équation de la réaction nucléaire est :
$$^{234}_{90}\text{Th} \longrightarrow {}^{234}_{91}\text{Pa} + {}^{0}_{-1}e$$

2. Préciser, en justifiant, le type de radioactivité correspondant à cette transformation.

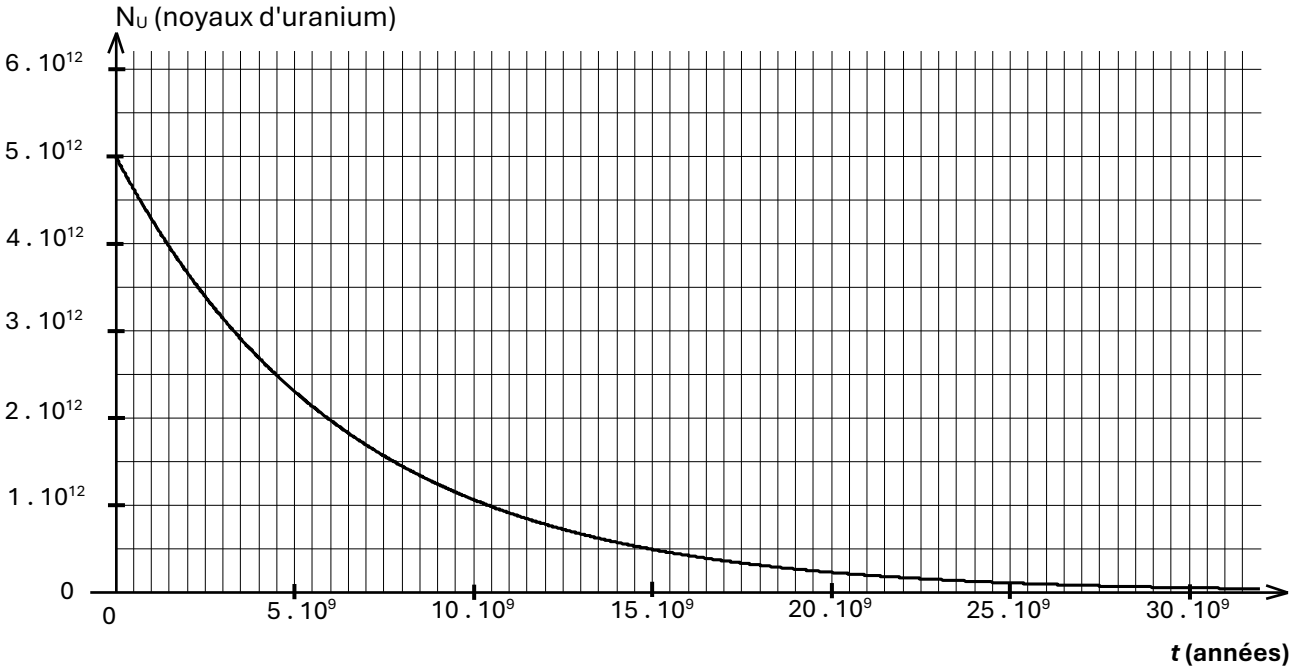
Le processus complet consiste en une succession de désintégrations α et β^- conduisant à un noyau de plomb 206 et modélisée par l'équation globale :
$$^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{206}_{82}\text{Pb} + 6\ {}^{0}_{-1}e + 8\ {}^{4}_{2}\text{He}$$

2nde partie : géochronologie

On a constaté d'une part, que les minéraux d'une même couche géologique, donc du même âge, contiennent de l'uranium 238 et du plomb 206 en proportions remarquablement constantes, et d'autre part que la quantité de plomb dans un minéral augmente proportionnellement à son âge relatif.
Si on mesure la quantité de plomb 206 dans un échantillon de roche ancienne, en considérant qu'il n'y en avait pas initialement, on peut déterminer l'âge du minéral à partir de la courbe de décroissance radioactive du nombre de noyaux d'uranium 238.

Étudions un échantillon de roche ancienne dont l'âge, noté t_{Terre}, correspond à celui de la Terre.

On considère la courbe de décroissance radioactive du nombre $N_U(t)$ de noyaux d'uranium 238 dans un échantillon de roche ancienne.



On donne la constante radioactive de l'uranium 238 : $\lambda = 4{,}92 \times 10^{-18}\ \text{s}^{-1}$

3. **(M)** Indiquer la quantité initiale $N_U\ (0)$ de noyaux d'uranium.

On rappelle que l'activité $A(t)$ de l'échantillon d'uranium 238 est donnée par la relation :

$$A(t) = -\frac{dN_u}{dt}\ (t)$$

4. Donner l'expression de l'activité $A(t)$ de l'échantillon d'uranium 238 en fonction de la constante radioactive λ et du nombre de noyaux d'uranium $N_U(t)$.
5. En déduire que le nombre de noyaux d'uranium $N_U(t)$ satisfait une équation différentielle de la forme $y' = ay$ et préciser l'expression de a.
6. **(M)** Résoudre l'équation différentielle précédente et montrer que la solution vérifiant la condition initiale $N_u(0)$ indiquée à la question 1 a pour expression :

$$N_u(t) = 5 \times 10^{12} \times e^{-4{,}92\times10^{-18}\times t}$$

7. **(M)** En utilisant la réponse à la question précédente, montrer que le temps de demi-vie $t_{1/2}$ et la constante radioactive λ de l'uranium 238 sont liées par la relation $\lambda t_{1/2} = \ln 2$.

   On rappelle que $N_u(t_{1/2}) = \frac{N_u(0)}{2}$.
8. En déduire la valeur de la demi-vie de l'uranium 238.
9. Vérifier graphiquement la valeur de la demi-vie $t_{1/2}$ de l'uranium 238 (représenter la construction sur la courbe donnée en début d'exercice).

On a mesuré le nombre de noyaux de plomb dans l'échantillon de roche analysé : $N_{Pb}(t_{\text{Terre}}) = 2{,}5 \times 10^{12}$.

10. Établir la relation entre $N_U\ (t_{\text{Terre}})$, $N_U(0)$ et $N_{Pb}(t_{\text{Terre}})$ et en déduire le nombre $N_U(t_{\text{Terre}})$ de noyaux d'uranium.
11. Déterminer l'âge t_{Terre} de la Terre.

Une méthode de datation radioactive peut être utilisée tant qu'il reste au moins 0,1 % des noyaux initiaux. La méthode dite au carbone 14 utilise la décroissance radioactive du carbone 14 dont le nombre de noyaux évolue selon la loi de décroissance :

$$N_C(t) = N_C(0) \times e^{-1,2\times10^{-4}\times t}$$

avec t en années.

12. **(M)** Calculer la durée au bout de laquelle il ne reste que 0,1 % des noyaux de carbone 14 initialement présents
13. Donner deux raisons pour lesquelles il n'est pas possible de déterminer l'âge de la Terre en utilisant la méthode de datation au carbone 14.