

Mesures et incertitudes : fiche pour le professeur

Évaluation de type A de l'incertitude-type

Comment évaluer l'incertitude lorsque les élèves répètent les mesures ?

Ce qu'il faut savoir avant de commencer

Quelle que soit la méthode employée pour l'estimer, **une incertitude-type EST un écart-type** caractérisant une dispersion. On envisage ici le cas où cette dispersion est observée par l'opérateur et caractérisée à l'aide d'outils statistiques, permettant ainsi de procéder à une évaluation de type A de l'incertitude. Cette évaluation de type A n'est évidemment possible qu'à la condition que les erreurs de mesure soient aléatoires et aient ainsi l'opportunité de varier lorsque l'on répète les mesures.

Notion de répétabilité

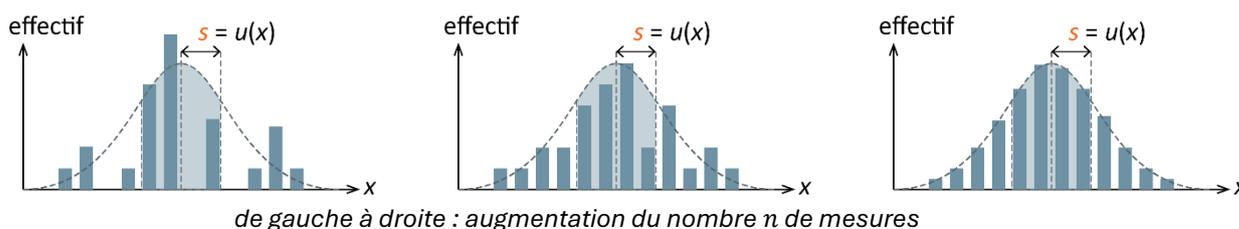
On envisage dans cette fiche une mesure réalisée et répétée à n reprises dans les conditions de répétabilité définies ainsi par le VIM (vocabulaire international des termes fondamentaux et généraux de métrologie) :

Condition de mesurage dans un ensemble de conditions qui comprennent la même procédure de mesure, les mêmes opérateurs, le même système de mesure, les mêmes conditions de fonctionnement et le même lieu, ainsi que des mesurages répétés sur le même objet ou des objets similaires pendant une courte période de temps.

Autrement dit on envisage le cas d'une mesure répétée **par un même élève**, avec le même matériel, en un temps court et portant sur un unique objet. La fiche suivante envisagera le cas de mesures réalisées par plusieurs élèves.

Évaluation de type A d'une incertitude-type

- Répéter n fois le protocole de mesure.
 - ▶ On obtient n valeurs x_1, x_2, \dots, x_n .
 - ▶ Si les erreurs *ayant l'opportunité de varier* sont multiples : plus le nombre n de mesures est élevé, plus la répartition des valeurs mesurées admet « une enveloppe » proche d'une loi normale :



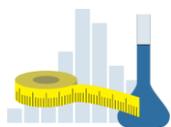
- Calculer l'écart-type échantillon ou « expérimental » s de la série de valeurs. L'incertitude-type d'une valeur mesurée selon le protocole EST cet écart-type :

$$u(x_i) = s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}$$

Il s'agit d'un estimateur de l'écart-type de la loi normale que l'on aurait si on avait réalisé un échantillon comportant une infinité de valeurs (voir encadré ci-après pour la justification du dénominateur $n - 1$).

- ▶ Avec les calculatrices usuelles, cet écart-type échantillon est noté s , s_n ou σ_{n-1} .
- ▶ Avec un tableur : « =ECARTYPE.STANDARD (...) » (Excel) ou « = ECARTYPE.S (...) » (LibreOffice).
- Le meilleur estimateur de la valeur vraie est la **moyenne** des n valeurs et son incertitude-type s'estime par la relation :

$$u(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

**Diviser par n ou par $n - 1$... quelle est la « bonne formule » de l'écart-type ?**

L'écart-type σ_N d'une **population** de N valeurs (enseignée par nos collègues de mathématiques) vaut :

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2} \quad N \text{ étant l'effectif de la population, soit le nombre total de valeurs possibles}$$

Lorsque l'on ne dispose que d'un **échantillon** de n valeurs appartenant à la population des N valeurs, les statistiques montrent que l'écart-type de ces n valeurs (estimé avec la relation précédente) possède un biais d'estimation qui tend à le sous-estimer. On obtient en moyenne un écart-type de valeur :

$$\sigma_n \approx \sigma_N \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

Or un échantillon de valeurs est censé renseigner sur la population à laquelle il appartient : autrement dit on utilise un échantillon restreint pour caractériser la population entière : c'est donc *in fine* σ_N qui est recherché. On l'estime donc avec la formule de l'écart-type échantillon s qui corrige le biais précédent.

Lors d'une mesure en physique-chimie : la population des valeurs possibles est toujours infinie, donc impossible à explorer en totalité. C'est pourquoi c'est toujours l'écart-type échantillon qui est exploité.

Faut-il toujours diviser l'écart-type par \sqrt{n} pour estimer l'incertitude-type ?

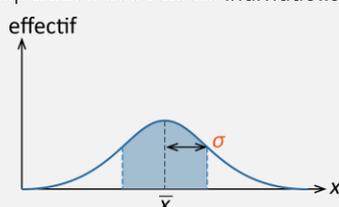
La réponse à cette question est : souvent mais pas systématiquement. Tout dépend de l'objectif poursuivi en répétant un protocole de mesure.

**Écart-type d'un échantillon de valeurs moyennes**

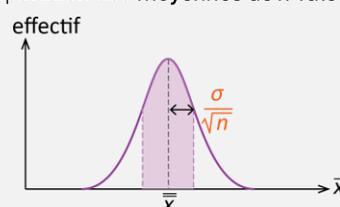
Si l'on considère plusieurs échantillons de n valeurs de x , chaque valeur individuelle x_i étant la réalisation d'une variable aléatoire d'écart-type $\sigma(x)$, alors on montre que les moyennes de ces échantillons se répartissent suivant une loi normale dont l'écart-type vaut :

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}$$

Répartition des valeurs **individuelles** :



Répartition des **moyennes de n valeurs** :



En pratique, lorsque nous réalisons une estimation de type A en classe, chaque élève réalise **une** seule série de mesures correspondant à **un** échantillon de n valeurs et on obtient un écart-type expérimental s qui est un estimateur de σ .

Calculer $u(\bar{x}) = s/\sqrt{n}$ peut être pertinent ou pas, selon l'objectif poursuivi en répétant n fois la mesure.

- **Objectif 1** : avoir la meilleure valeur possible de la grandeur mesurée, cas le plus fréquent au lycée
Dans ce cas la valeur à retenir est la moyenne \bar{x} de toutes les valeurs de l'échantillon associée à son incertitude-type estimée par :

$$u(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

- **Objectif 2** : estimer la fidélité associée à un protocole de mesure
Dans ce cas **l'objet d'étude est le protocole** et non la grandeur mesurée.

Par exemple : mesurer n fois la masse d'aspirine dans un comprimé pour étudier la dispersion d'une méthode de titrage. Dans ce cas le but n'est pas de connaître cette masse (puisqu'elle est indiquée sur la boîte et a été contrôlée par du personnel bien plus qualifié que nos élèves). Il s'agit d'évaluer l'incertitude-type d'UN résultat de mesure obtenu par la méthode testée en calculant l'écart-type expérimental de l'échantillon réalisé.

Dans ce cas c'est l'incertitude-type d'une valeur individuelle qui a du sens, soit l'écart-type s de l'échantillon.