Mesures et incertitudes : fiche pour le professeur

Propagation des incertitudes

Comment estimer l'incertitude d'une grandeur calculée à partir de valeurs mesurées ?

Lois de propagation et cas fréquents

Si une grandeur x est calculée en fonction de grandeurs mesurées a, b, c, etc. **indépendantes** : l'estimation de l'incertitude-type $u(x)$ se calcule à l'aide d'une loi de propagation, laquelle dépend du type de relation conduisant à la valeur de x.

Les cas fréquents au lycée sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Relation	Loi de propagation des incertitudes-types	Exemple
❶	$x = a + b$ ou $x = a - b$	$u(x) = \sqrt{u(a)^2 + u(b)^2}$	Mesure double : $L = x_2 - x_1$; $u(L) = \sqrt{x_2^2 + x_1^2}$; Si l'on estime que $u(x_1) = u(x_2)$: $u(L) = u(x) \times \sqrt{2}$
❷	$x = \lambda \cdot a$ (λ constante)	$u(x) = \lvert\lambda\rvert \cdot u(a)$	Calcul de la concentration d'une solution diluée d'un facteur 10, la concentration de la solution mère étant la seule source d'erreur jugée non-négligeable : $c_{\text{fille}} = \frac{c_{\text{mère}}}{10}$; $u(c_{\text{fille}}) = \frac{1}{10} u(c_{\text{mère}})$
❸	$x = \frac{a}{b}$ ou $x = a \cdot b$	$u(x) = \lvert x\rvert \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$	Calcul de la célérité des ondes sonores à partir d'une distance et d'une durée mesurées : $v = \frac{D}{\Delta t}$; $u(v) = v\sqrt{\left(\frac{u(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{u(\Delta t)}{\Delta t}\right)^2}$
❹	$x = \lambda a + \mu b$ (λ et μ constantes)	$u(x) = \sqrt{\lambda^2 (u(a))^2 + \mu^2 (u(b))^2}$	Calcul de la masse molaire du méthane : $M_{CH_4} = M_C + 4M_H$; $u(M_{CH_4}) = \sqrt{u(M_C)^2 + 16 u(M_H)^2}$
❺	$x = \lambda a^n b^m$	$u(x) = \lvert x\rvert \sqrt{n^2 \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + m^2 \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$	Calcul d'une énergie cinétique à partir d'une masse et d'une vitesse mesurées : $Ec = \frac{1}{2} m v^2$; $u(Ec) = Ec \times \sqrt{\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{u(v)}{v}\right)^2}$
❻	$x = \lambda \times n^a$	$u(x) = \lvert\lambda\rvert \ln(n)\, n^a u(a)$	Calcul d'une concentration en ions oxonium à partir d'une valeur de pH mesurée : $[H_3O]^+ = c° \times 10^{-pH}$; $u[H_3O^+] = c° \times \ln(10) \times [H_3O^+] \times u(pH)$ $\approx 2{,}3 \times [H_3O^+] \times u(pH)$

D'où viennent ces formules ?

Soit y est une fonction de plusieurs variables aléatoires $x_1, x_2, \ldots, x_N$ indépendantes. $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$ sont les écarts-types (ou « déviations standards ») associés à ces N variables aléatoires. Alors on montre que l'écart-type de la distribution des valeurs de y est tel que :

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2 \right]$$

Toutes les formules de propagation données dans cette fiche sont des cas particuliers de cette loi générale.

Exemple : aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance R on a mesuré une tension électrique de valeur U et on a calculé I à l'aide de la loi d'Ohm. On cherche l'incertitude-type de la valeur de I.

On a :

$$I = \frac{U}{R} \frac{\partial I}{\partial U} = \frac{1}{R} \frac{\partial I}{\partial R} = -\frac{U}{R^2}$$

L'application de la formule générale ci-dessus donne :

$$u(I)^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^2 u(U)^2 + \left(\frac{U}{R^2}\right)^2 u(R)^2$$

$$\left(\frac{u(I)}{I}\right)^2 = \left(\frac{1}{RI}\right)^2 u(U)^2 + \left(\frac{U}{R^2 I}\right)^2 u(R)^2$$

$$= \left(\frac{u(U)}{U}\right)^2 + \left(\frac{u(R)}{R}\right)^2$$

Et donc :

$$u(I) = I\sqrt{\left(\frac{u(U)}{U}\right)^2 + \left(\frac{u(R)}{R}\right)^2}$$

On retrouve bien le résultat de la loi de propagation ❸

Que dire aux élèves ?

- Les élèves n'ont **aucune formule à connaître** : l'enseignant fournit la relation à utiliser « clef en mains ».
- Comme les relations sont généralement complexes à manipuler pour les élèves (et sans grand intérêt puisqu'ils n'en connaissent pas l'origine), nous recommandons l'utilisation d'outils permettant d'épargner aux élèves de devoir les taper à la calculatrice : tableur pré-programmé ou logiciel GUM_MC par exemple.
- Un des intérêts que peuvent avoir ces relations (en plus de fournir l'estimation de l'incertitude recherchée) est de pouvoir comparer entre eux les poids des différentes sources d'erreur afin de proposer une amélioration du protocole de mesure.

  Exemple caricatural : une résistance est connue à 5% près et on mesure une tension U à ses bornes avec un multimètre numérique afin de calculer l'intensité.

  Alors : $u(U)/U$ sera forcément beaucoup plus faible que $u(R)/R$.

  L'expression de $u(I)$ montre que l'incertitude sur R est prépondérante dans l'estimation de $u(I)$.

  → Amélioration possible de la mesure de I : mesurer R avec un ohmmètre.