Étude d'un service au badminton

Exercice mixte : Mathématiques / Physique

- **Physique-Chimie : mouvements et aspects énergétiques**
  - Citer et exploiter la relation entre les coordonnées de la position et celles du vecteur vitesse.
  - Exploiter une loi de vitesse donnée en fonction du temps pour construire une approximation des positions par incréments de temps.
  - Citer et exploiter les relations définissant l'énergie cinétique et le travail d'une force constante lors d'un mouvement rectiligne.
  - Associer une variation d'énergie cinétique au travail des forces.
- **Mathématiques : trigonométrie, produit scalaire, dérivées et primitives**
  - Utiliser la trigonométrie du triangle rectangle pour calculer des longueurs ou des angles (collège).
  - Produit scalaire : définition géométrique.
  - Calculer la projection d'un vecteur sur un axe.
  - Calculer une fonction dérivée
  - Construire point par point par la méthode d'Euler une approximation de la courbe représentative de la solution d'un problème de Cauchy du type $y' = f(t)$ et $y(t_0) = y_0$.

People Playing Badminton – domaine public

Situation étudiée :

Sur la photo ci-dessus, une joueuse de badminton s'apprête à faire un service en revers. Pour permettre l'étude de son mouvement, le volant est équipé d'un système permettant d'enregistrer en fonction du temps les coordonnées de son vecteur-vitesse.

Dans tout l'exercice le volant est représenté par un point M, coïncidant avec le centre de masse du volant. L'instant où celui-ci quitte le contact avec la raquette de la joueuse est pris comme origine des dates : $t = 0$.

L'annexe 1 donne le tableau des valeurs de $v_x(t)$, $v_y(t)$, coordonnées du vecteur-vitesse du volant ainsi que celles de $x(t)$ et $x(t)$, coordonnées du vecteur-position du volant.

L'annexe 2 représente graphiquement l'évolution des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ en fonction du temps.

Ce problème contient trois parties indépendantes :

- la partie 1 étudie le lancer et le mouvement dans sa globalité ;
- la partie 2 consiste à compléter les valeurs et points manquants dans les annexes 1 et 2 en exploitant la méthode d'Euler ;
- la partie 2 étudie les aspects énergétiques du mouvement étudié.

1ère partie : étude globale du mouvement enregistré

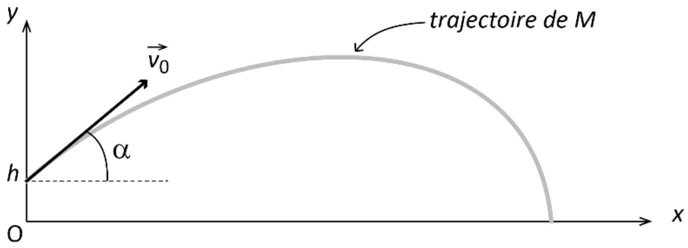
1. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan muni du repère $(O; x; y)$. Ses coordonnées sont :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Rappeler l'expression de la norme de $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, en fonction de ses coordonnées x et y.

Détermination des conditions initiales du mouvement

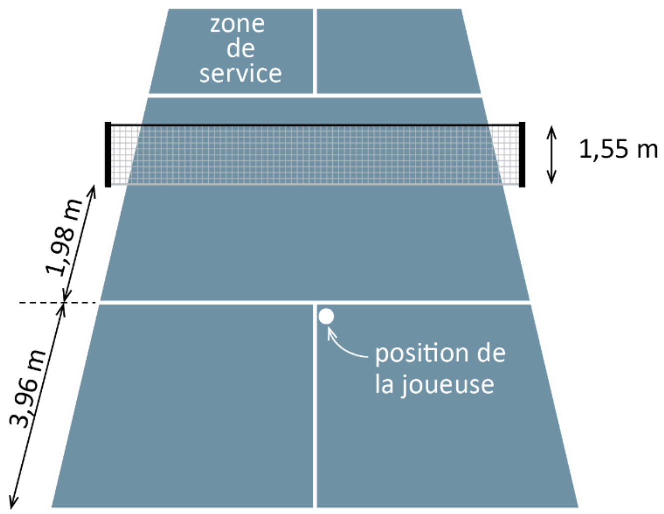
Le mouvement du volant de badminton est étudié dans un repère cartésien dont l'origine O est au sol, à la verticale de la position du point M à l'instant où il quitte le contact avec la raquette de la joueuse :



2. Extraire de l'annexe 1 les valeurs initiales des coordonnées du vecteur-vitesse $\vec{v}$ du point étudié et en déduire la valeur v_0 de la vitesse initiale donnée au volant par la joueuse de badminton. On pourra réinvestir la relation de la question 1.
   NB : les physiciens emploient généralement le mot « valeur » quand les mathématiciens parlent plus souvent de « norme ».
3. L'angle α représenté sur la figure est appelé « angle de tir ». Exploiter vos connaissances de mathématiques sur la projection d'un vecteur sur un axe pour écrire une relation entre v_0, v_{x0} et $\cos(\alpha)$.
4. Exploiter l'annexe 1 pour déterminer la hauteur h du point étudié à l'instant où le volant quitte la raquette de la joueuse.

Le service est-il réussi ?

On donne ci-dessous les dimensions d'un terrain de badminton lors d'un match en simple. La joueuse est placée à la position repérée sur le schéma. Pour que son service soit réussi, le volant doit tout d'abord franchir le filet, puis atteindre la « zone de service » de son adversaire.



On admet, pour les questions 5 à 7, que la trajectoire du volant est très peu en diagonale : elle est comprise dans un plan quasi-perpendiculaire au filet.

5. Exploiter une des courbes de l'annexe 2 pour déterminer la date t_f à laquelle le volant de badminton passe dans le camp de l'adversaire.
6. Exploiter l'annexe 2 pour vérifier que le volant passe bien au-dessus du filet.
7. Le service est-il pour autant réussi ? Exploiter l'une des courbes de l'annexe 2 pour répondre.

2ème partie : à la recherche des valeurs manquantes

Dans le tableau de l'annexe 1 il manque les valeurs de x et y aux dates 0,60 et 0,65 s. Le but de cette partie est de les retrouver en employant la méthode d'Euler.

Aspect mathématique

RAPPEL de mathématiques : l'approximation affine

Soit f une fonction dérivable sur un ensemble I et de fonction dérivée f'. Soit a un nombre appartenant à I. Si $f(a)$ est connu, l'approximation affine de f d'antécédant $a + h$ est :

$$f(a + h) \approx f(a) + h \times f'(a)$$

8. À quelle condition sur h l'approximation rappelée ci-dessus devient-elle exacte ?

Application en physique

9. Rappeler l'expression de $v_x(t)$ en fonction de $x(t)$

10. Transposer l'approximation affine rappelée précédemment pour exprimer $x(t + \Delta t)$ en fonction de $x(t)$, de Δt et de $v_x(t)$.

11. On va exploiter l'expression précédente pour calculer chaque valeur de x manquante à partir de la valeur précédente. Cette méthode itérative est appelée méthode d'Euler et Δt est « le pas » de l'itération. Que vaut, au minium, le pas de l'itération dans le cas du tableau de l'annexe 1 ?

12. Faire les calculs nécessaires pour compléter les valeurs de x aux dates $t = 0{,}60$ s et $t = 0{,}65$ s.

13. En suivant la même méthode, calculer les valeurs manquantes de y à ces mêmes dates.

14. Reporter les valeurs de $x(t)$ et $y(t)$ calculées aux questions 12 et 13 dans le graphique de l'annexe 2.

3ème partie : étude énergétique du mouvement

Dans cette partie on cherche à savoir si la force de frottement exercée par l'air a une influence significative sur le mouvement du volant de badminton. Sa position à l'instant où il quitte le contact avec la raquette est notée A et celle où atteint le sol est notée B.

Attention : en B le volant de badminton atteint le sol mais n'est pas encore en contact avec lui, c'est la position « juste avant » qu'il ne touche le sol.

Données :

- Masse du volant de badminton : $m = 5{,}0 \text{ g}$;
- Champ de pesanteur terrestre : $g = 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

15. Exploiter la réponse à la question 2 pour calculer la valeur Ec_A de l'énergie cinétique du volant à l'instant

16. Rappeler l'expression du travail du poids et calculer sa valeur entre A et B.

17. Que vaudrait l'énergie cinétique du volant en B si le poids était la seule force exercée sur le volant ? Exploiter le théorème de l'énergie cinétique pour répondre.

18. Calculer la vitesse v_B à laquelle le volant atteint le sol et en déduire son énergie cinétique finale réelle $Ec_{\text{Bréelle}}$.

19. Déduire des réponses précédentes si la force de frottement peut, ou non, être négligée. Si non, indiquer en justifiant si son travail est moteur ou résistant.

ANNEXE 1 : valeurs obtenues grâce au capteur fixé au volant

t (s)	Coordonnés du vecteur-vitesse		Coordonnées du vecteur-position	
	v_x $(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$	v_y $(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$	x (m)	y (m)
0	10,06	6,54	0	0,8
0,05	6,01	4,34	0,5	1,13
0,10	4,57	3,1	0,8	1,35
0,15	3,73	2,23	1,03	1,51
0,20	3,17	1,54	1,22	1,62
0,25	2,77	0,95	1,38	1,7
0,30	2,46	0,42	1,52	1,75
0,35	2,22	-0,08	1,64	1,77
0,40	2,02	-0,57	1,75	1,77
0,45	1,86	-1,05	1,85	1,74
0,50	1,72	-1,5	1,94	1,69
0,55	1,6	-1,9	2,03	1,62
0,60	1,5	-2,25		
0,65	1,41	-2,54		
0,70	1,33	-2,77	2,26	1,29
0,75	1,26	-2,95	2,33	1,15
0,80	1,2	-3,09	2,39	1
0,85	1,14	-3,2	2,45	0,85
0,90	1,09	-3,28	2,51	0,69
0,95	1,04	-3,34	2,56	0,53
1,00	1	-3,38	2,61	0,36
1,05	0,96	-3,41	2,66	0,19
1,10	0,92	-3,44	2,71	0,02

ANNEXE 2 : évolutions en fonction du temps des coordonnées de position