Exercice mathématiques / physique
Radioactivité du Technétium 99

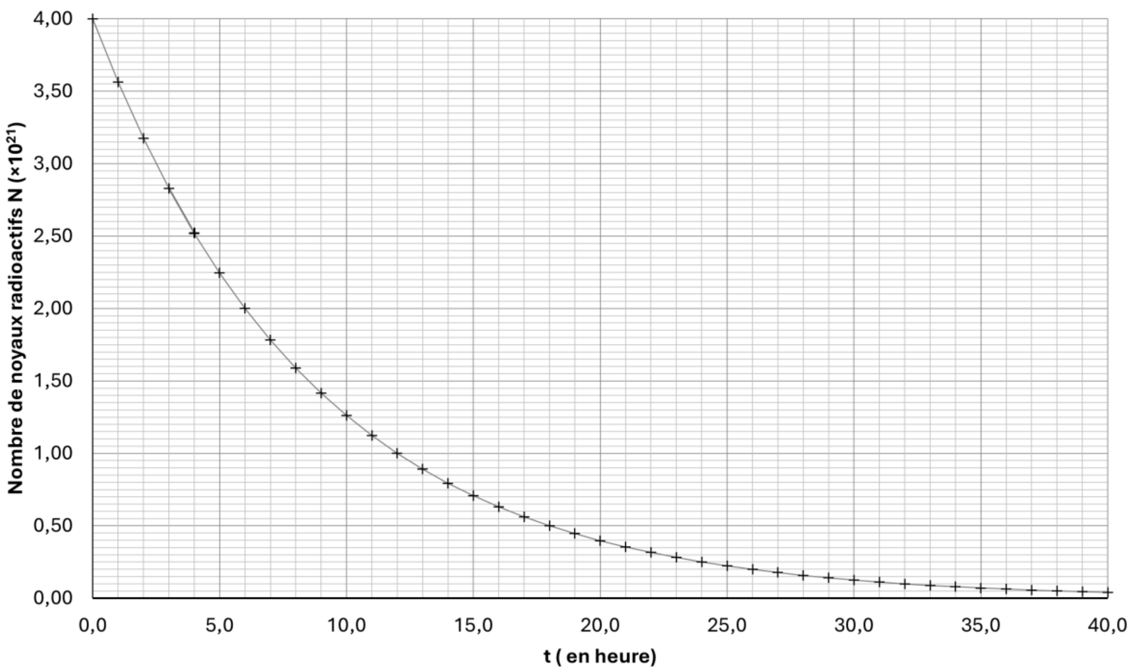
- **Physique-Chimie : mouvements et interactions**
  - Radioactivité β^-.
  - Loi de conservation.
  - Établir l'expression de la vitesse en régime permanent lorsqu'il existe des forces de frottement fluide.
  - Évolution de la population moyenne d'un ensemble de noyaux radioactifs.
  - Loi de décroissance radioactive.
  - Constante de désintégration λ.
  - Temps de demi-vie.
- **Mathématiques**
  - Équation différentielle
  - Fonction logarithme népérien
  - Fonction exponentielle
  - Équation différentielle

EXERCICE 1 : le Technétium 99 au service de la médecine

La scintigraphie est un examen qui sert à analyser les organes et leur fonctionnement, grâce à une caméra spécifique. Pratiquée après injection d'un produit faiblement radioactif et non toxique, comme le Technétium 99, la scintigraphie peut concerner par exemple les os, la thyroïde ou le cœur.

On mesure, à l'aide un compteur Geiger-Muller, la radioactivité émise par $N_0 = 4{,}00 \times 10^{21}$ noyaux de Technétium 99 ($^{99}_{43}Tc$) au cours du temps. Après analyse, les mesures conduisent au tracé de la courbe du document 1 qui montre une décroissance du nombre de noyaux.

DOCUMENT 1 : évolution du nombre de noyaux radioactifs du Technétium 99 au cours du temps



DONNÉES utiles

- Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$
- Masse molaire atomique du Technétium 99 : $M({}^{99}_{43}Tc) = 98{,}9\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Quelques numéros atomiques :

Élément	Molybdène (Mo)	Technétium (Tc)	Ruthénium (Ru)
Numéro atomique Z	42	43	44

Partie 1 : à propos du Technétium

1. Calculer la masse de technétium 99 qu'il faut peser pour disposer de $N_0 = 4{,}00 \times 10^{21}$ noyaux de Technétium 99.
2. L'équation partielle de la désintégration du technétium 99 est la suivante :
$$ {}^{99}_{43}Tc \longrightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{A}_{Z}X $$
Déterminer de le symbole complet du noyau ${}^{A}_{Z}X$ produit lors de cette désintégration.
3. Déduire de l'équation de la désintégration le type de radioactivité (α, β^+ ou β^-) dont il s'agit.
4. Définir le temps de demi-vie $t_{1/2}$ puis évaluer celui du technétium 99 à l'aide du document 1. On laissera apparaître les traces de cette mesure sur le graphique.
5. En utilisant la définition du temps de demi-vie, prévoir le nombre de noyaux de Technétium 99 restants dans l'échantillon au bout de durées de valeur :
   - $\Delta t_2 = 2 \times t_{1/2}$;
   - $\Delta t_3 = 3 \times t_{1/2}$.
6. On note N_k le nombre de noyaux de technétium restants au bout d'une durée de valeur $\Delta t_k = k \times t_{1/2}$.
Identifier, parmi les propositions suivantes, l'expression de N_k en fonction de k :
$$ N_k = \frac{N_0}{k} \qquad N_k = \frac{k}{N_0} \qquad N_k = k \times N_0 \qquad N_k = \frac{N_0}{2^k} \qquad N_k = \frac{N_0}{k^2} $$
Vérifier que la relation choisie est en accord avec les mesures du document 1 jusqu'à $3 \times t_{1/2}$.
7. L'iode 123 est également utilisé lors du suivi par exemple de la glande thyroïdienne.
Sa demi-vie vaut 13 heures. Tracer l'allure de la courbe de décroissance des noyaux radioactifs d'iode 123 au cours du temps sur le graphique du document 1. On considérera qu'on a également $4{,}00 \times 10^{21}$ noyaux d'iode 123 au départ.
8. Le césium 134, dont la demi-vie est 30,2 ans, serait-il adapté à la scintigraphie (en supposant que le césium 134 permet de suivre le fonctionnement d'organes) ?

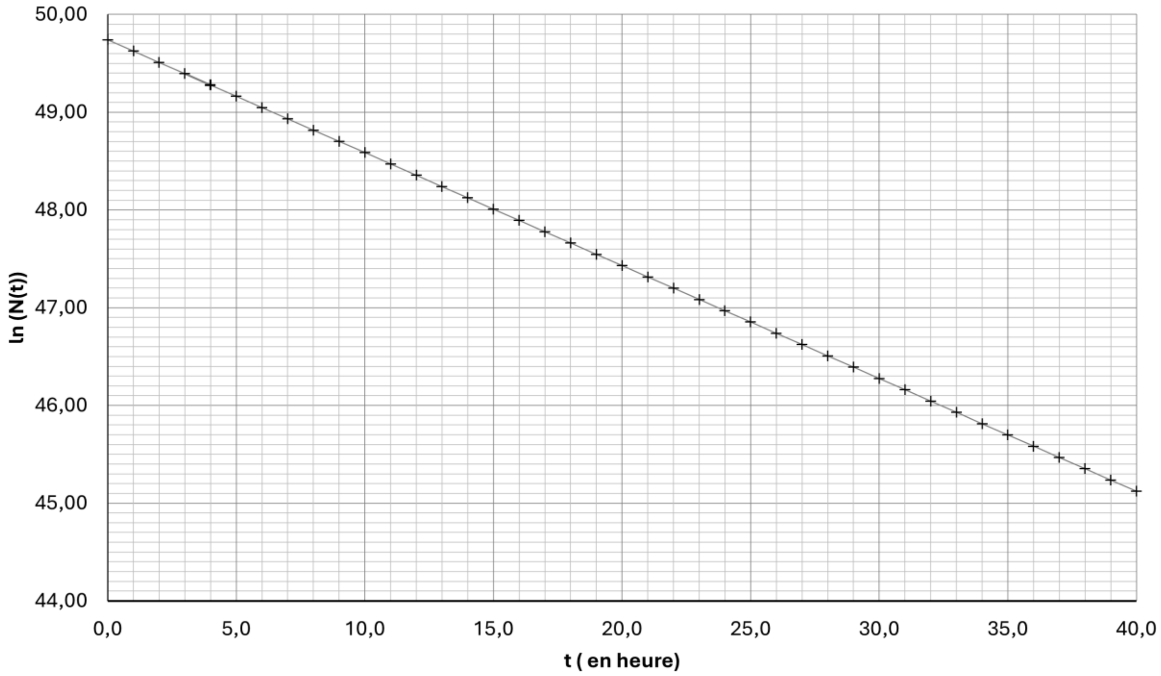
Partie 2 : étude de la décroissance radioactive du Technétium

On modélise l'évolution du nombre de noyaux radioactifs de Technétium 99 par une fonction N et on montre que cette fonction satisfait l'équation différentielle du premier ordre :
$$ \frac{dN}{dt} + \lambda N = 0 $$
λ étant la constante radioactive exprimée en h^{-1} (h : heure).

9. Vérifier que la fonction N définie sur l'intervalle [0 ; 40] par $N(t) = 4{,}00 \times 10^{21} \times e^{-\lambda t}$ est la solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale $N(0) = 4{,}00 \times 10^{21}$.
10. Montrer que $\ln\big(N(t)\big) = -\lambda \times t + \ln(4{,}0 \times 10^{21})$.

On a représenté, dans le document 2 ci-dessous, le logarithme népérien du nombre de noyaux radioactifs de Technétium 99, obtenus à partir des mesures, en fonction du temps exprimé en heures. La droite tracée modélise le nuage de points expérimentaux.

DOCUMENT 2 : évolution de ln(N(t)) en fonction du temps t



11. Justifier que ce graphique est en accord avec l'expression démontrée dans la question 10.

12. Déterminer le coefficient directeur de la droite tracée sur le document 2 et en déduire que la valeur de la constante radioactive λ est voisine de 0,116 h^{-1}.

13. Grâce à l'expression $N(t) = 4{,}0 \times 10^{21} \times e^{-\lambda t}$, que l'on peut écrire $N(t) = N_0 \times e^{-\lambda t}$, montrer que le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ s'exprime par la relation :

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

14. Calculer la valeur numérique du temps de demi-réaction $t_{1/2}$ en exploitant la valeur de λ obtenue à la question 12.

15. Comparer les résultats des questions 4 et 14.

16. En utilisant les expressions $N(t) = N_0 \times e^{-\lambda t}$ et $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$, retrouver les résultats des questions 4 et 5 en montrant que les nombres de noyaux restants de Technétium 99 aux dates $t_{1/2}$, $2 \times t_{1/2}$ et $3 \times t_{1/2}$ valent respectivement $N_0/2$, $N_0/4$ et $N_0/8$.