Chute verticale dans un fluide visqueux

Baccalauréat de mars 2023 – exercice 1 du sujet de Polynésie

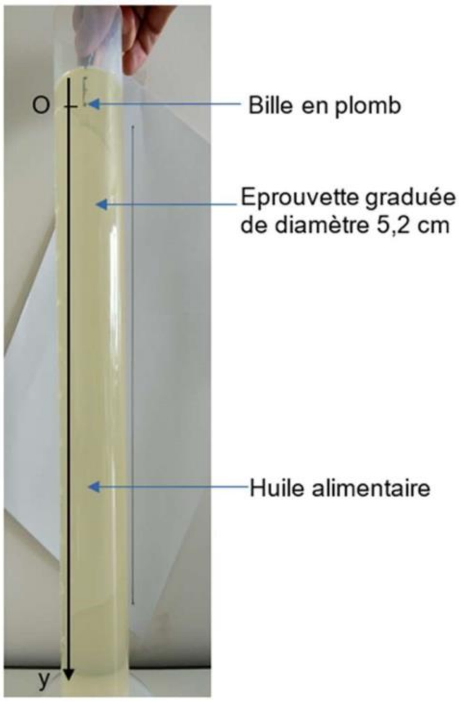
- **Physique-Chimie : mouvements et interactions**
  - Citer et exploiter la relation entre les coordonnées du vecteur-vitesse et celles du vecteur-accélération.
  - Citer et exploiter les lois de Newton.
  - Établir l'expression de la vitesse en régime permanent lorsqu'il existe des forces de frottement fluide.
  - Modéliser un mouvement vertical avec frottement visqueux :
    - établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse ;
    - caractériser le régime permanent ;
    - identifier le temps caractéristique ;
    - établir la loi horaire d'évolution de la vitesse.
  - Exploiter des résultats expérimentaux pour identifier le régime permanent et estimer le temps caractéristique.
- **Mathématiques : équations différentielles**
  - Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.
  - Déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle du type : y' = ay + b.
  - Déterminer la solution d'une équation différentielle du type : y' = ay + b vérifiant une condition initiale y(x0) donnée.

Cet exercice propose de modéliser la chute verticale d'une bille de plomb dans une huile alimentaire.

Données :

- Les actions exercées par le fluide sur la bille sont modélisées par une force de frottement fluide :
  $\vec{f} = -6\pi\eta r\,\vec{v}$
  dans laquelle η est la viscosité du fluide, r est le rayon de la bille et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de la bille ;
- intensité de la pesanteur : $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$;
- intervalle des valeurs courantes de la viscosité η d'une huile alimentaire : entre 60 et $100\ \mathrm{mPa \cdot s}$.

Une bille de plomb de rayon $r = 1{,}03\ \mathrm{mm}$ et de masse $m = 0{,}056$ g est lâchée à $t = 0$ s sans vitesse initiale dans une huile alimentaire (photo ci-dessous).
On nomme $v(t)$ la valeur de la vitesse de la bille, exprimée en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, à l'instant t, exprimé en seconde.
L'axe Oy est orienté suivant la verticale descendante.



Le pointage des positions successives de la bille permet de tracer l'évolution de sa vitesse en fonction du temps :

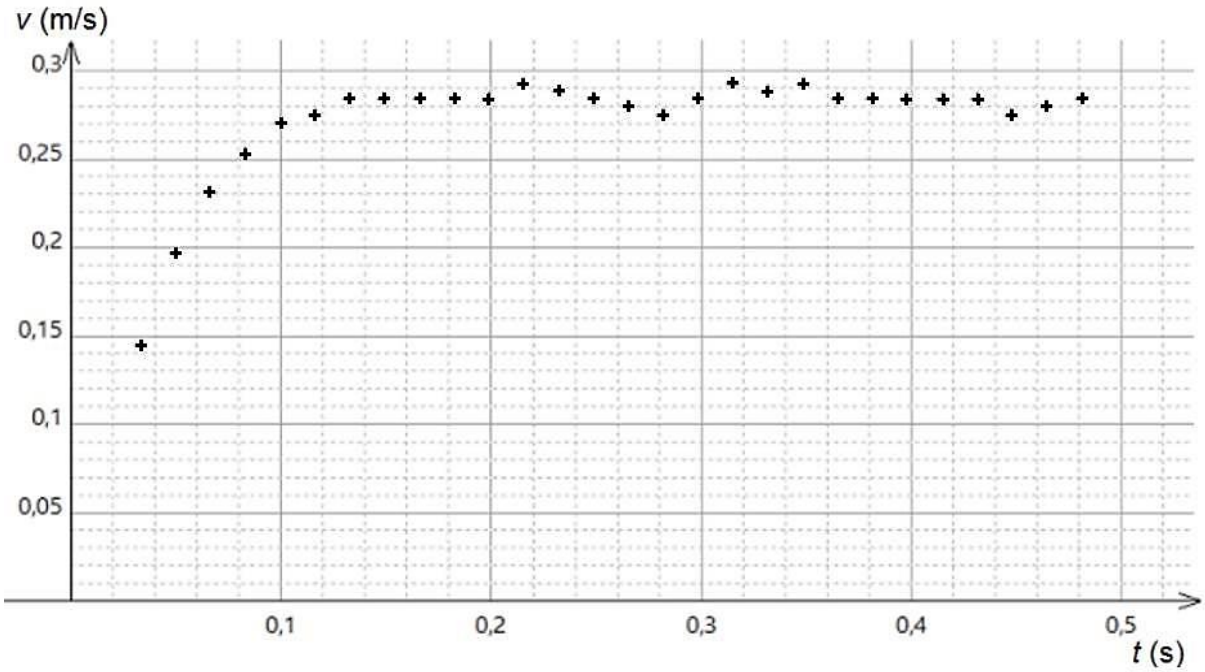


Figure 1. Vitesse de la bille en fonction du temps

1. Justifier, à partir des résultats de la figure 1, que la chute de la bille n'est pas une chute libre.
2. Estimer graphiquement la valeur de la vitesse de chute de la bille en régime permanent.

Pour la suite de l'exercice, on prendra comme valeur de la viscosité de l'huile alimentaire $\eta = 80 \times 10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s}$.

3. En considérant le système {bille} dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, écrire l'expression vectorielle de la seconde loi de Newton.
4. En déduire, par projection de la deuxième loi de Newton sur l'axe (Oy), que la vitesse de chute de la bille doit vérifier l'égalité :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{6\pi\eta r}{m} v + g$$

Étude mathématique de la vitesse

On souhaite déterminer une expression de la vitesse de la chute de la bille. Les données physiques de l'expérience conduisent à résoudre l'équation différentielle (E) :

$$y' = -27{,}7y + 9{,}81$$

5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
6. Montrer que l'unique solution v de l'équation différentielle (E) qui vérifie $v(0) = 0$ est définie par l'expression

$$v(t) = \frac{9{,}81}{27{,}7} \times (1 - e^{-27{,}7t})$$

7. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$

Analyse du modèle obtenu

Dans cette expérience, la valeur de la vitesse de la bille, exprimée en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, en fonction du temps t exprimé en s, est donnée par la fonction v définie sur $[0\ ;\ 0{,}5]$ dont l'expression est :

$$v(t) = 0{,}35 \times (1 - e^{-27{,}7t})$$

8. Vérifier la cohérence de l'ordre de grandeur de la limite obtenue à la question 7 avec celui de la vitesse en régime permanent estimée à la question 2. Proposer une justification à l'écart observé.