Modèle de la vitesse de chute d'une hématie dans un plasma sanguin

Baccalauréat de mars 2021 – exercice 1 du sujet de métropole

- **Physique-Chimie : mouvements et interactions**
  - Citer et exploiter la relation entre les coordonnées du vecteur-vitesse et celles du vecteur-accélération.
  - Citer et exploiter les lois de Newton.
  - Établir l'expression de la vitesse en régime permanent lorsqu'il existe des forces de frottement fluide.
  - Modéliser un mouvement vertical avec frottement visqueux :
    - établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse ;
    - caractériser le régime permanent ;
    - identifier le temps caractéristique ;
    - établir la loi horaire d'évolution de la vitesse.
  - Exploiter des résultats expérimentaux pour identifier le régime permanent et estimer le temps caractéristique.
- **Mathématiques : équations différentielles**
  - Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.
  - Déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle du type :y' = ay + b.
  - Déterminer la solution d'une équation différentielle du type : y' = ay + b vérifiant une condition initiale y(x0) donnée.

La détermination de la vitesse de sédimentation d'une hématie (globule rouge) est une analyse médicale mise en œuvre pour détecter un état inflammatoire chez un patient. Initialement en suspension dans le plasma sanguin, les hématies d'un échantillon de sang anti-coagulé chutent verticalement dans le plasma et se déposent, c'est la sédimentation.

L'objectif de cet exercice est d'étudier un modèle de l'évolution de la vitesse de chute d'une hématie dans un plasma. Pour cela, on considère une hématie dans un plasma sanguin dilué. Elle est soumise à différentes actions mécaniques, dont une modélisée par une force de frottement fluide $\vec{f}$ proportionnelle à la vitesse de chute de l'hématie notée $\vec{v}$. L'hématie, initialement au repos, est animée d'un mouvement rectiligne vertical accéléré avant d'atteindre un régime permanent où elle évolue à vitesse constante, appelée vitesse de sédimentation.

Notations et données :

- m, masse de l'hématie : $m = 4{,}356 \times 10^{-14}$ kg
- m_L, masse de liquide déplacée par l'hématie : $m_L = 3{,}552 \times 10^{-14}$ kg
- K, coefficient de frottement de la force de frottement : $K = 4{,}900 \times 10^{-8}$ USI
- g, intensité de la pesanteur terrestre : $g = 9{,}81 \text{ m.s}^{-2}$

1. Écrire l'expression vectorielle de la seconde loi de Newton dans un cas général et préciser le nom de chaque grandeur ainsi que son unité dans le système international.

L'application de la seconde loi de Newton à l'hématie, après projection sur un axe vertical dirigé vers le bas, permet d'écrire la relation suivante :

$$m \times g - m_L \times g - K \times v = m \times a \qquad (1)$$

2. Identifier dans cette relation (1), les forces modélisant les actions s'exerçant sur l'hématie en chute dans le plasma et donner le nom et l'expression de chacune d'elles.
3. Expliquer qualitativement, à partir de la relation (1), l'apparition d'un régime permanent.
4. **a.** Déduire de la relation (1), l'équation différentielle dont la vitesse $v(t)$ de l'hématie est une solution. Cette équation différentielle fera apparaitre les grandeurs m, m_L et K.
   b. Montrer que l'équation précédente peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{dy}{dt} + 1{,}125 \times 10^6 \times y = 1{,}811$$

c. Donner l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

d. Justifier que parmi l'ensemble des solutions de cette équation, la fonction v est la solution qui vérifie la condition $v(0)$ = 0.

En déduire que, pour tout réel *t* de $[0; +\infty[$, $v(t) = 1{,}610 \times 10^{-6} \times \left(1 - e^{-1{,}125 \times 10^{6} t}\right)$.

5. Déterminer la valeur de la limite de $v(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Préciser la signification physique de cette valeur dans le cadre de ce modèle.

6. Représenter l'allure de la courbe « vitesse de chute de l'hématie dans le plasma en fonction du temps *t* » pour tout *t* appartenant à l'intervalle [0 ; + ∞ [.