Exercices de la séquence n°9
Liens entre forces exercées et mouvement

EXERCICE 1 : QCM sur les lois de la mécanique

*Cet exercice est aussi proposé en version **interactive** et traitable en ligne*

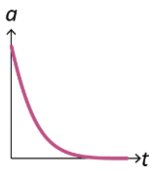
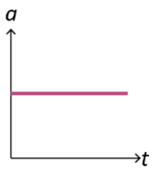
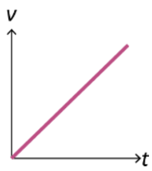
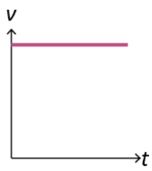
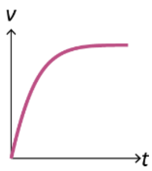
Sélectionner la, ou les, réponses les plus adaptées :

1. Si la résultante des forces appliquées à un objet est nulle, on peut en déduire :
   - ☐ que l'objet est immobile.
   - ☐ que l'objet est animé d'un mouvement de chute libre.
   - ☐ que l'objet est animé d'un mouvement circulaire à vitesse constante.
   - ☐ que l'objet se déplace en ligne droite à vitesse constante.
2. Un objet est en mouvement de chute libre sans vitesse initiale. Alors :
   - ☐ l'objet n'est soumis qu'à son poids ;
   - ☐ sa vitesse est proportionnelle à la durée de chute ;
   - ☐ sa vitesse atteint une valeur limite ;
   - ☐ sa vitesse est proportionnelle au carré du temps écoulé.
3. Lors d'un mouvement de chute libre dans le champ de pesanteur uniforme, la valeur de l'accélération :
   - ☐ est proportionnelle à la masse de l'objet ;
   - ☐ ne dépend pas de la masse de l'objet ;
   - ☐ augmente avec la vitesse initiale de chute ;
   - ☐ diminue avec l'altitude.
4. Les lois horaires qui décrivent la position d'un objet au cours du temps dépendent :
   - ☐ de la vitesse initiale de l'objet ;
   - ☐ de la position initiale de l'objet ;
   - ☐ des coordonnées du point de chute de l'objet ;
   - ☐ de la valeur de l'accélération.
5. Lorsqu'un objet chute dans l'air, sa vitesse atteint une valeur limite car :
   - ☐ on ne peut pas dépasser la célérité du son ;
   - ☐ la vitesse devient égale au poids ;
   - ☐ les forces de frottement compensent la force d'attraction de la terre ;
   - ☐ il touche le sol ;
   - ☐ pour une autre raison.
6. A faible vitesse, la force de frottement visqueux subie par un corps est :
   - ☐ verticale ;
   - ☐ vers le bas ;
   - ☐ opposée au déplacement ;
   - ☐ horizontale.
7. À faible vitesse la force de frottement visqueux subie par un corps est :
   - ☐ inversement proportionnelle à la valeur de la vitesse ;
   - ☐ indépendante de la nature du fluide ;
   - ☐ indépendante de la taille de l'objet en mouvement ;
   - ☐ constante quelle que soit la vitesse ;
   - ☐ autre réponse.

EXERCICE 2 : vrai ou faux ?

*Cet exercice est aussi proposé en version **interactive** et traitable en ligne*

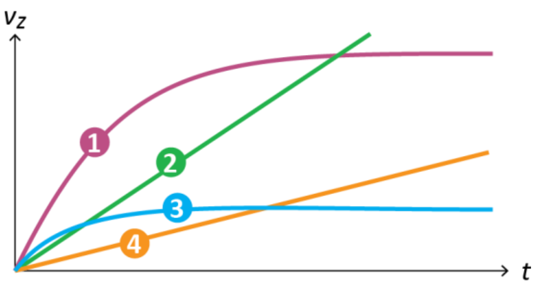
On a tracé ci-dessous en fonction du temps la valeur de l'accélération ou de la vitesse de 5 objets en mouvement rectiligne dans le référentiel terrestre. Indiquer dans le tableau, pour chacune des 6 affirmations proposées, si elle vraie ou fausse.

Objet et tracé de $a(t)$ ou $v(t)$ / **Affirmation**	**Objet 1** 	**Objet 2** 	**Objet 3** 	**Objet 4** 	**Objet 5** 
Cet objet peut être en chute libre.					
La résultante des forces appliquées est constante mais non nulle.					
La résultante des forces appliquées est nulle.					
Cet objet se déplace à vitesse constante.					
Cet objet finit par s'arrêter.					
La vitesse de cet objet est proportionnelle au temps ou fonction affine du temps.					
La distance parcourue par l'objet est proportionnelle au temps.					

EXERCICE 3 : chutes à la surface de différents astres

*Cet exercice est aussi proposé en version **interactive** et traitable en ligne*

Un petit objet solide est lâché sans vitesse initiale à la surface d'un astre. Son mouvement est étudié dans un repère d'axe (Oz), orienté vers le bas et dont l'origine coïncide avec la position initiale du centre de l'objet.
La coordonnée verticale du vecteur-vitesse est représentée ci-dessous en fonction du temps :



Indiquer à la surface de quel astre chaque enregistrement a été réalisé, à l'aide des données ci-dessous.

DONNÉES : caractéristiques de quelques astres

	Mars	Terre	Lune	Vénus
champ de pesanteur $(\mathrm{m \cdot s^{-2}})$	3,71	9,81	1,6	8,87
pression atmosphérique (Pa)	6×10^{-3}	1×10^{5}	1×10^{-5}	9×10^{6}

NB : Une pression élevée indique une quantité de gaz importante dans l'atmosphère.

EXERCICE 4 : tir à l'arc

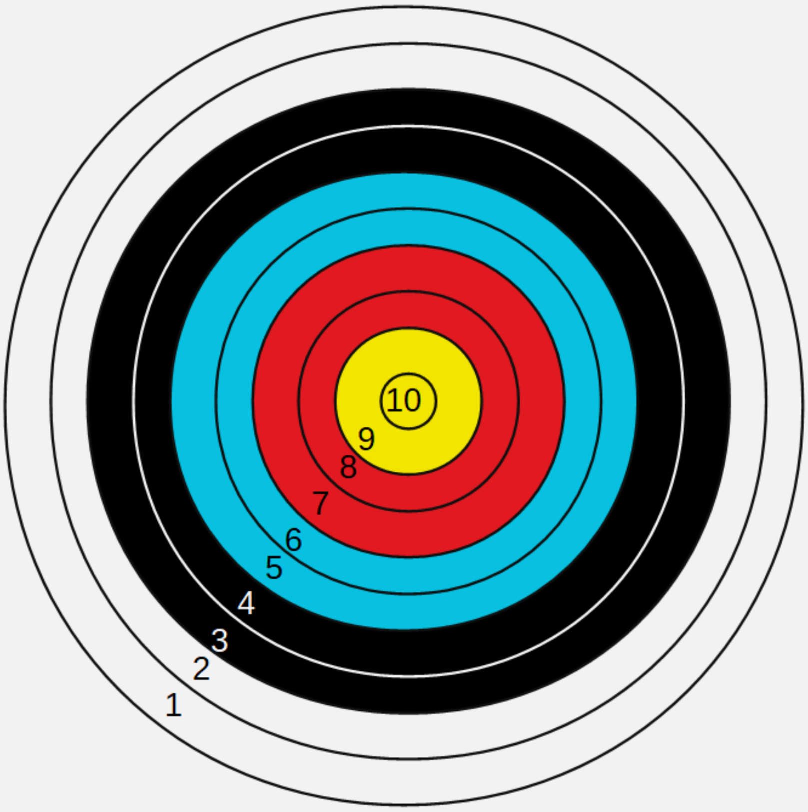
Un archer s'entraîne au tir sur cible à $d = 25\ \mathrm{m}$ de la cible. Le mouvement de la flèche est étudié à partir de la date $t = 0$ où elle n'est plus en contact avec l'arc. On note v_0 la valeur de la vitesse initiale de la flèche.
Le centre de la cible est dans le même plan horizontal que la flèche au moment du départ.
Le mouvement de la flèche sera étudié dans un repère $(O; x; y)$, dont l'origine est située au sol, à la verticale de la flèche au moment du lancer. L'axe Ox est horizontal et orienté vers la cible, l'axe Oy est vertical et orienté vers le haut.
Dans ces conditions, les équations horaires décrivant le mouvement de la pointe de la flèche sont (les coordonnées de position étant exprimées en mètre) :

- $x(t) = 90 \times t$
- $y(t) = 1{,}60 - 5{,}0 \times t^2$

1. Exprimer en fonction du temps les coordonnées $v_x(t)$ et $v_y(t)$ de la pointe de la flèche.
2. Calculer les coordonnées initiales v_{x0} et v_{y0} du vecteur vitesse.
3. Au vu des équations horaires, peut-on dire que la pointe de la flèche satisfait le modèle de la chute libre ? Calculer les coordonnées de sons vecteur-accélération pour répondre.
4. Réaliser, sans soucis d'échelle, un schéma de situation en indiquant : le repère d'étude, la position de la flèche, et sa vitesse à $t = 0$, ainsi que la position du centre de la cible.
5. Quelle est la durée que va mettre sa flèche pour atteindre la cible ?
6. Combien de points l'archer va-t-il marquer ?

DOCUMENT : Cible de tir à l'arc

Une cible de tir à l'arc est constituée d'un disque de D=122 cm de diamètre, constitué de cercles concentriques dont le rayon croît de 6,1 cm à chaque cercle.

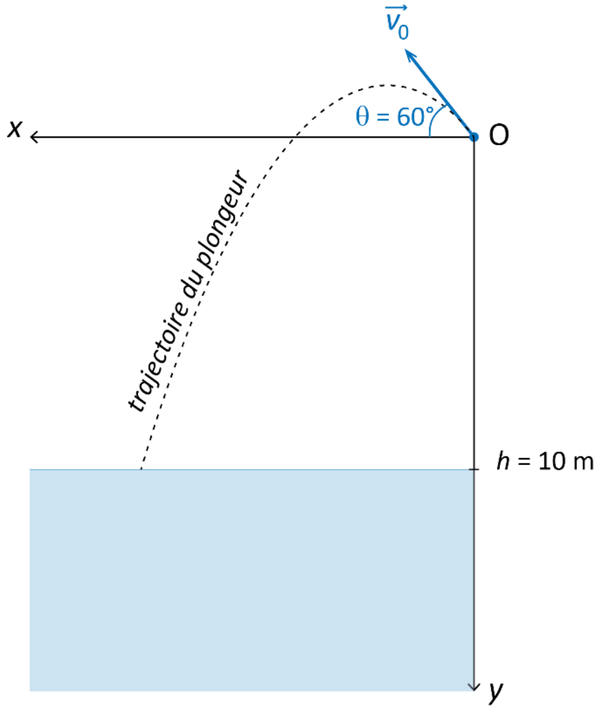


EXERCICE 5 : le grand saut

Un plongeur saute du plongeoir d'une piscine, situé à 10 m au-dessus de la surface de l'eau. On cherche à savoir où et avec quelle vitesse il atteint la surface de l'eau.

Dans ce but on modélise ainsi la situation :

- on étudie le centre d'inertie du plongeur dans le référentiel terrestre, supposé galiléen ;
- son mouvement est supposé être une chute libre ;
- l'instant où le plongeur quitte le plongeoir est considéré comme l'origine des dates $t = 0$;
- les positions du point étudié sont étudiées dans le repère $(O; x; y)$ représenté ci-dessous.



Données :

- intensité du champ de pesanteur terrestre : $g \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
  masse du plongeur : $m = 70 \text{ kg}$;
- hauteur du plongeoir par rapport à l'eau : $h = 10 \text{ m}$;
- vitesse initiale du point étudié : $v_0 = 3{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- angle entre l'horizontale et la vitesse initiale : $\theta = 60°$.

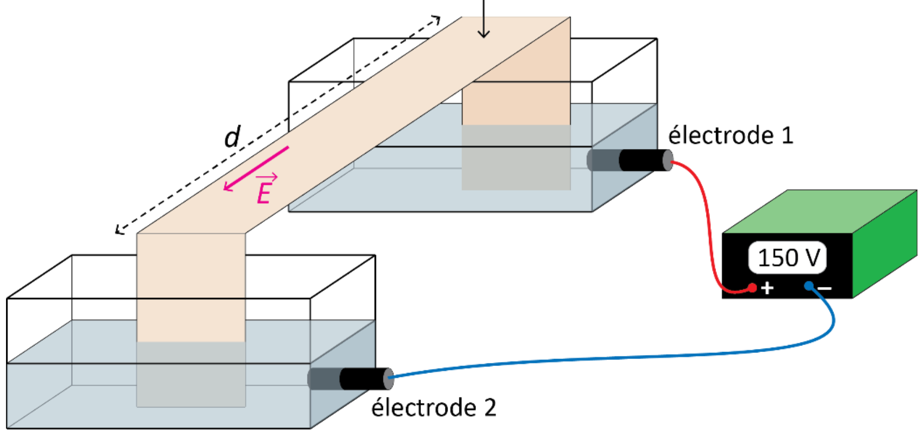
1. Quelles sont les forces négligées dans le cadre de cette étude ?
2. Déterminer, dans le repère d'étude, les coordonnées du vecteur-accélération du centre d'inertie du plongeur après qu'il a quitté le plongeoir.

Le plongeur quitte le promontoire avec une vitesse de valeur $v_0 = 3{,}0\ m \cdot s^{-1}$, vers le haut, faisant un angle $\theta = 60°$ par rapport à l'axe Ox.

3. Déterminer les coordonnées du vecteur-vitesse lors de l'impulsion (v_{0x} et v_{0y}).
4. Exprimer en fonction du temps les coordonnées du vecteur-vitesse ($v_x(t)$ et $v_y(t)$) au cours du mouvement.
5. Exprimer en fonction du temps les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du vecteur-position du point étudié.
6. En exploitant l'expression de $v_y(t)$, exprimer la date t_{max} à laquelle l'athlète atteint le sommet de sa trajectoire. Calculer les coordonnées de ce sommet S.
7. En exploitant l'expression de $y(t)$, exprimer et calculer la date t_2 à laquelle le plongeur touche la surface de l'eau.
8. Calculer la valeur de la vitesse à laquelle le plongeur atteint la surface de l'eau.

EXERCICE 6 : principe de l'électrophorèse

L'électrophorèse est une technique très utilisée en biologie pour séparer des protéines. Cette méthode de séparation est basée sur la différence de vitesse de migration des ions placés dans un champ électrostatique uniforme, selon leur charge électrique et leur taille.
Un mélange de protéines est ionisé, puis déposé au centre d'un support horizontal (papier d'acétate de cellulose) soumis à un champ électrostatique uniforme crée par une tension U entre deux électrodes :

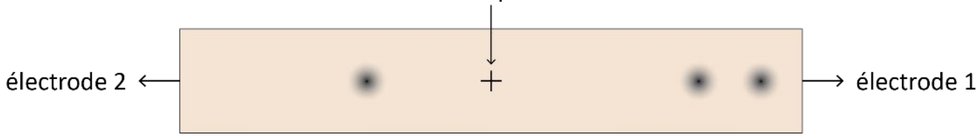


Dans ce cas, chaque constituant chargé du mélange est soumis :
– à la force électrostatique $\overrightarrow{F_E}$;
– à la force de frottement fluide modélisée par $\vec{f} = -kr\vec{v}$ où :
  → k est une constante positive caractéristique du milieu de migration,
  → r le rayon de Stokes qui est d'autant plus grand que la molécule est volumineuse
  → v la valeur de la vitesse de migration du constituant.

En régime permanent, la force de frottement fluide compense exactement la force électrostatique.

1. Pourquoi est-il nécessaire d'ioniser les protéines à analyser ?
2. En régime permanent, quelle est la nature du mouvement des ions ?
3. Dans quel sens se déplace un ion de charge électrique positive, négative ?
4. Déterminer l'expression de la vitesse de migration en régime permanent en fonction de $|q|$, E k et r.
5. Tous les ions se déplacent-ils à la même vitesse ? Quelles sont les caractéristiques des constituants les plus rapides ?

Au bout d'une heure, on coupe le champ électrique et on pulvérise sur le papier d'acétate de cellulose une solution révélatrice qui colore les acides aminés : ceux-ci deviennent ainsi visibles sur la feuille de papier.



6. Combien de constituants ont été séparés dans le mélange par cette méthode ?
7. Que peut-on dire de la charge électrique de chacun d'entre eux ?

EXERCICE 7 : viscosité d'une huile moteur.

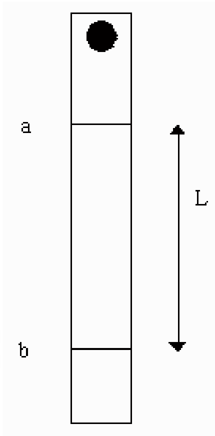
Une huile moteur est une huile minérale enrichie en additifs améliorants. Elle contribue au bon fonctionnement et à l'entretien du moteur. Elle permet à la fois de lubrifier, nettoyer, lutter contre la corrosion, améliorer l'étanchéité mais aussi d'évacuer la chaleur due à la combustion et aux frictions des différentes pièces les unes sur les autres.
Pour bien choisir son huile moteur, il faut regarder les indications des indices de viscosité à froid (chiffre avant le W de « winter ») et à chaud (chiffre après le W).

« 5 » est l'indice de viscosité à froid et « 30 » l'indice de viscosité à chaud

Au départ, et particulièrement en hiver, l'huile doit être assez fluide pour faciliter son pompage et assurer un bon démarrage. Lorsque le moteur est en fonctionnement, la température augmente. Cette fois l'huile doit être plus épaisse pour assurer un bon « tapis » entre les pièces en mouvement mais assez fluide pour limiter les frottements.

PARTIE 1: Mesure de la viscosité d'une huile à l'aide d'un viscosimètre à chute de bille

Description d'un viscosimètre à chute de bille



Un viscosimètre à chute de bille est constitué d'un tube central muni de deux repères a et b séparés d'une distance L. Le tube central est placé dans une enceinte étanche dans laquelle circule un bain d'eau thermostaté. La bille, de rayon inférieur au diamètre du tube, est lâchée par le haut du tube.

Principe de la mesure

Une bille d'acier de rayon R est lâchée sans vitesse initiale dans un milieu huileux de masse volumique ρ_h et de viscosité η. On considère que la bille a atteint sa vitesse limite lorsqu'elle passe devant le repère a. On déclenche alors le chronomètre que l'on arrête lorsque la bille passe devant le repère b.

DONNÉES :

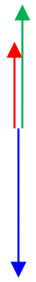
– Le volume d'une sphère de rayon R est donné par :

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

– En régime d'écoulement laminaire, la force de frottement fluide est proportionnelle à la valeur v de la vitesse.

Dans le référentiel terrestre considéré galiléen, le système $\{\text{bille}\}$ est soumis à son poids $\vec{P}$, la force de frottement fluide $\vec{f}$ et à la poussée d'Archimède $\vec{\pi_A}$.

1. Identifier sur le schéma ci-dessous, les trois forces qui s'exercent sur la bille



2. Attribuer chacune de ces expressions à la valeur d'une des forces prises en compte :

Poussée d'Archimède	●	●	$6\pi\eta R v$
Poids	●	●	$\dfrac{4\pi\rho_a g R^3}{3}$
Force de frottement fluide	●	●	$\dfrac{4\pi\rho_h g R^3}{3}$

3. Caractériser le mouvement de la bille entre les repères a et b.

4. Donner une expression de la vitesse limite de la bille en fonction de L (distance entre les repères a et b) et Δt (durée mesurée par le chronomètre).

5. L'application de la deuxième loi de Newton conduit à l'expression suivante :

$$v_{lim} = \frac{2gR^2(\rho_a - \rho_h)}{9\eta}$$

À l'aide de la relation établie à la question précédente et de celle ci-dessus, montrer que la viscosité η peut s'écrire :

$$\eta = K(\rho_a - \rho_h)\,\Delta t$$

6. A une température de 20°C, la durée de chute d'une bille de masse volumique ρ_a = 7,85 x 10^3 kg.m^{-3}, dans une huile de masse volumique ρ_h = 870 kg.m^{-3}, mesurée entre les deux repères a et b est de Δt = 6,7 s. On donne K = 3,55 x 10^{-8} (SI). Calculer une valeur numérique de la viscosité de cette huile.

PARTIE 2 : étude de la viscosité d'une huile en fonction de sa température.

Des mesures de la viscosité d'une huile ont été réalisées à l'aide du viscosimètre de chute à bille pour différentes températures du bain thermostaté et consignées dans le tableau ci-dessous :

Viscosité dynamique η (SI)	1,31	0,71	0,44	0,17	$8{,}0\times10^{-2}$	$3{,}90\times10^{-2}$	$2{,}4\times10^{-2}$	$1{,}5\times10^{-2}$	$8{,}8\times10^{-3}$
Température (K)	253	263	273	293	310	330	345	360	380

7. Comment évolue la viscosité lorsque la température augmente ?

8. Ces deux grandeurs sont-elles proportionnelles entre elles ? Répondre à l'aide d'un graphique.

9. Quels types d'additifs faut-il ajouter à cette huile pour avoir une bonne huile moteur ? Justifier vos réponses.

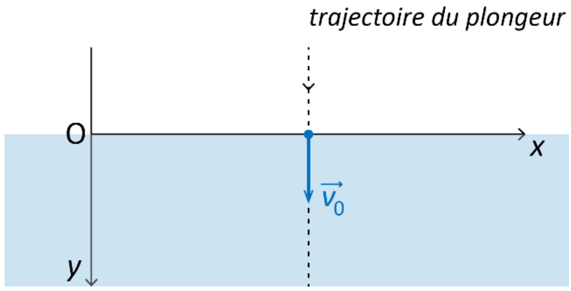
– Un épaississant à froid
– Un fluidifiant à froid
– Un épaississant à chaud
– Un fluidifiant à chaud.

EXERCICE 8 : le fond de la piscine

Après avoir sauté du plongeoir de hauteur 10 m, un plongeur arrive perpendiculairement à la surface de l'eau avec un vitesse $v_0 = 50\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Il subit alors, outre le poids ($\vec{P}$), la poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi_a}$ exercée par l'eau, et une force de frottement $\vec{f}$ de sens opposé à celui de son mouvement et dont la valeur s'exprime par : $f = kv^2$

v étant la valeur de la vitesse du plongeur et k une constante de valeur $k = 59\ \mathrm{N \cdot s^2 \cdot m^{-2}}$.



On souhaite déterminer la profondeur minimale de la piscine pour que le plongeur ne se blesse pas.

On modélise ainsi la situation :

- on étudie le centre de gravité G du plongeur dans le référentiel terrestre, supposé galiléen ;
- le mouvement de G est supposé rectiligne et vertical ;
- origine des date : instant où le plongeur touche l'eau ;
- repère d'étude $(O; x; y)$: voir figure ci-dessus ;
- masse du plongeur : $m_p = 70\ \mathrm{kg}$;
- masse volumique du corps humain : $\rho_p = 945\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
- masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

1. Schématiser sans soucis d'échelle les forces exercées sur le plongeur lorsqu'il est dans l'eau.
2. Calculer les coordonnées, dans le repère d'étude, du vecteur-vitesse $\overrightarrow{v_0}$ à l'instant où le plongeur touche l'eau.
3. Calculer les valeurs P et Π_a du poids et de la poussée d'Archimède exercées sur le plongeur lorsqu'il est immergé.
4. Exprimer la coordonnée verticale de $\vec{P}$ puis celle de $\overrightarrow{\Pi_a}$ dans le repère d'étude (on notera V le volume du plongeur et ρ la masse volumique de l'eau. Montrer que ces valeurs sont en accord avec le fait que le plongeur finit par remonter à la surface.
5. Par application de la deuxième loi de Newton, établir l'équation différentielle satisfaite par la coordonnée v_y du vecteur-vitesse.

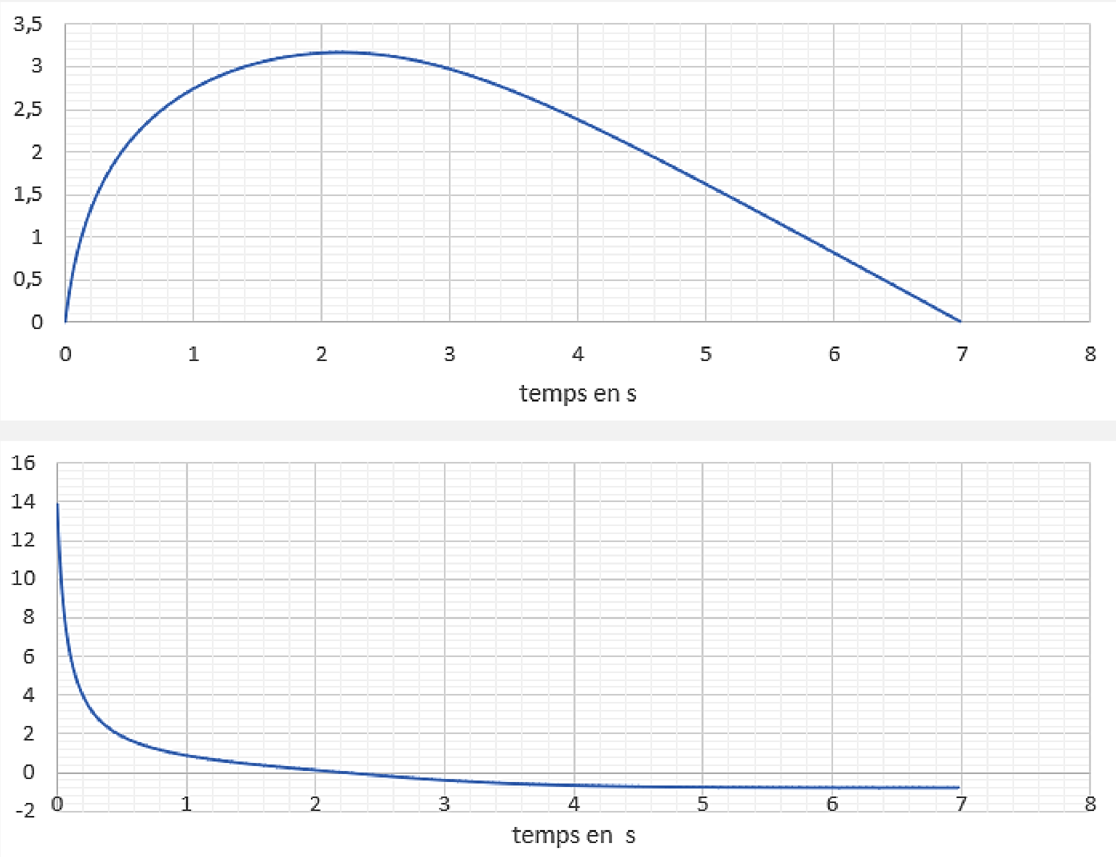
L'équation différentielle ci-dessus n'est pas soluble par une méthode analytique mais on peut déterminer, par la méthode d'Euler, les évolutions de $v_y(t)$ et de $y(t)$.

6. Voici un extrait du tableau de valeurs obtenu avec la méthode d'Euler : retrouver la valeur de v_y manquante.

t en s	a_y en m·s^{-2}	v_y en m·s^{-1}	y (m)
0,25	-10,50	3,33	1,51
0,26	-9,91		1,54
0,27	-9,36	3,14	1,57
0,28	-8,86	3,05	1,60

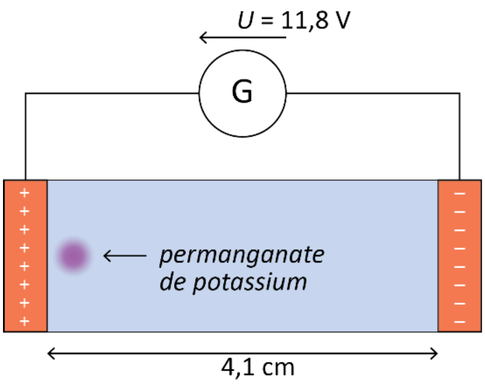
7. Les courbes obtenues sont données dans le document ci-après : l'une représente l'évolution de v_y et l'autre celle de y en fonction du temps : identifier chacune de ces deux courbes.
8. Ces courbes étant graduées en unité SI, estimer graphiquement :
   - la date à laquelle le plongeur atteint le point le plus bas de la piscine ;
   - la profondeur minimale de la piscine.
   - la durée que passe le plongeur sous l'eau.

DOCUMENT : courbes obtenues par la méthode d'Euler



EXERCICE 9 : Détermination du rayon d'un ion

Afin d'estimer le diamètre d'un ion permanganate hydraté $MnO_{4(aq)}^{-}$, on réalise le dispositif suivant : une goutte de permanganate de potassium est déposée sur un papier imbibé d'une solution conductrice, elle-même placée entre deux électrodes :

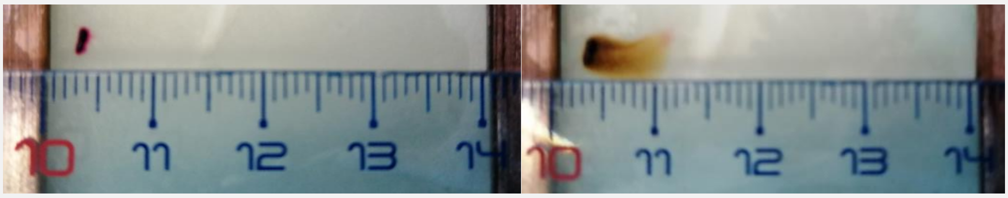


On modélise ainsi la situation :

- Chaque ion permanganate est soumis à une force électrostatique $\overrightarrow{F_{el}}$ et à une force de frottement visqueux $\vec{f}$ dont la valeur s'exprime par : $f = 6\pi\eta R v$
  - $\eta = 1{,}0 \times 10^{-3}$ Pa · s est la viscosité du milieu ;
  - R est le rayon de l'ion, supposé sphérique ;
  - v est la valeur de sa vitesse.
- L'ion adopte quasi-instantanément sa vitesse limite de déplacement.

Le document ci-dessous présente des photos réalisées lors de l’expérience.

DOCUMENT : photographies de l’expérience



Ces deux photos ont été prises à $\Delta t = 28\ min$ d’intervalle

1. **1.** Calculer numérique la valeur E du champ électrostatique qui règne entre les deux électrodes (on assimilera le dispositif à un condensateur plan).
2. **2.** Donner l’expression de la force électrostatique subie par un ion de charge q placé dans un champ électrique $\vec{E}$.
3. **3.** Quelle relation peut-on écrire entre les valeurs F_{el} et f des forces qui s’exercent sur chaque ion ? Justifier à l’aide des informations du préambule.
4. **4.** Déduire de la question précédente l’expression du rayon R en fonction de e (charge élémentaire), η, E et v.
5. **5.** Exploiter les photos du document pour calculer numériquement le rayon R d’un ion permanganate.

EXERCICE 10 : récifs artificiels

Afin de favoriser le peuplement des océans, il est possible de créer des récifs artificiels en immergeant des structures en béton. Une structure très couramment utilisée est constituée d’une cloche en béton, dont la paroi a été creusée d’un grand nombre de trous.
La méthode la plus rapide pour créer de tels récifs est de lâcher dans l’eau ces structures en béton qui se déposent alors aléatoirement au fond de l’océan.
La méthode souffre cependant d’un handicap : si un bloc de béton touche un fond marin avec une trop grande vitesse, il risque de se briser.
On estime que la vitesse du bloc ne doit pas dépasser $3{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pour ne pas se briser en touchant le sol.

Dépôts de Reef balls dans l’océan - Crédit photo : Flickr – licence CC2.0

On étudie le mouvement d’un bloc de béton, lâché sans vitesse initiale au-dessus de la surface de l’eau. L’étude a lieu dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, muni d’un repère d’axe Oz vertical, orienté vers le bas et dont l’origine coïncide avec la surface de l’eau.

Données et modélisation de la situation :

- Le bloc de béton subit de la part de l’eau :
  - la poussée d’Archimède $\overrightarrow{\Pi_a}$;
  - une force de frottement dont la valeur est

$$f = \frac{1}{2} C S \rho_e v^2$$

S étant l’aire de sa base, $\rho_e = 1020\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ la masse volumique de l’eau de mer et $C = 0{,}80$ une constante de traînée.

- La base du bloc de béton a un diamètre $D = 1{,}0$ m.
- Sa masse vaut : $m = 650 \text{ kg}$
- La masse volumique du béton utilisé vaut : $\rho_b = 2200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

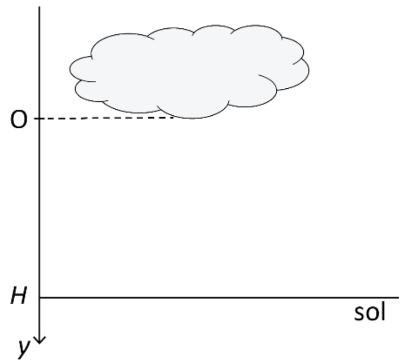
1. Calculer le volume de béton V_b qui est mis en œuvre pour la construction de l'élément.
2. Calculer la valeur Π_a de la poussée d'Archimède appliquée à cet élément, lors de son immersion dans l'eau de mer.
3. À l'aide de la première loi de Newton, exprimer et calculer la vitesse limite de chute et expliquer en quoi cette valeur montre que le bloc de béton ne peut pas être lâché n'importe où dans l'océan.
4. La méthode d'Euler est utilisée pour déterminer l'évolution de la vitesse du récif artificiel ; un extrait du tableau de valeurs obtenu est fourni ci-dessous :

t (s)	$a_y\ (m \cdot s^{-2})$	$v_z\ (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	z (m)
0,85	1,232619066	2,915719977	1,599811846
0,9	1,055593872	2,96849967	
0,95	0,900986394	3,01354899	
1	0,766829518	3,051890466	

5. Compléter la dernière colonne de ce tableau en en déduire la profondeur maximale d'immersion par cette méthode.

EXERCICE 11 : goutte de pluie

Une goutte d'eau, modélisée comme une sphère de rayon $r = 2$ mm, tombe de la base d'un nuage situé à une altitude de valeur $H = 1200$ m au-dessus du sol. L'origine des dates est l'instant où la goutte quitte le nuage, sa vitesse initiale est nulle.



Données :

- Intensité du champ de pesanteur terrestre $g = 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- Masse volumique de l'air : $\rho_{air} = 1{,}3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Masse volumique de l'eau : $\rho_{eau} = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Volume d'une sphère de rayon r :

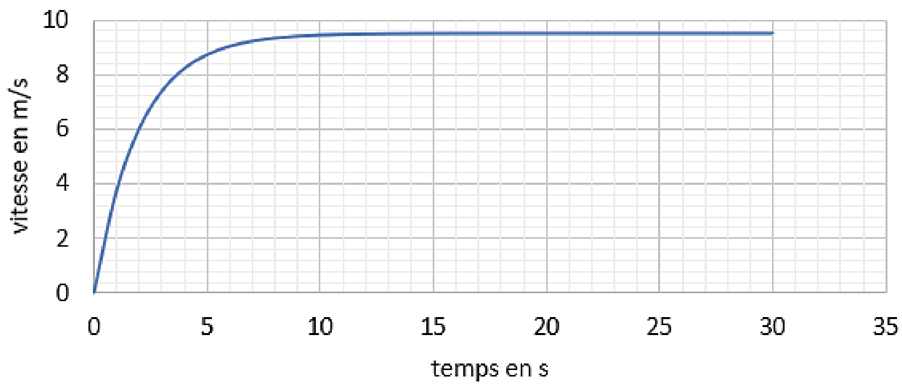
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Modèle de la chute libre

1. En supposant que la goutte est en chute libre, exploiter les lois de Newton pour établir la loi horaire $y(t)$ de son mouvement.
2. Calculer la valeur de la vitesse de la goutte lorsqu'elle atteint le sol.
3. En réalité, la goutte arrive sur le sol avec une vitesse de valeur $v = 9{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Comment expliquer la différence entre cette valeur et celle prévue à la question 2 ?

Prise en compte des actions de l'air

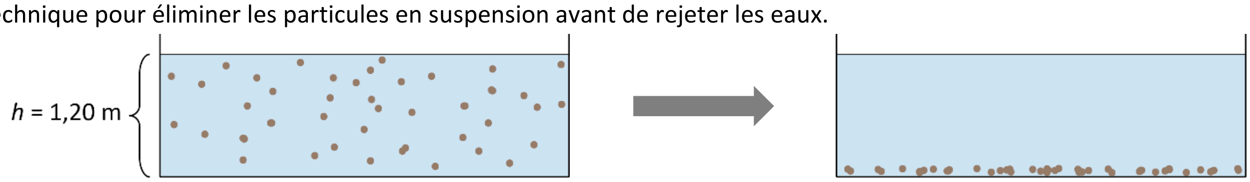
4. On note $\vec{P}$ le poids de la goutte et $\overrightarrow{\Pi_a}$ la poussée d'Archimède exercée par l'air. Calculer le quotient Π_a/P et montrer que sa valeur justifie que l'on néglige la poussée d'Archimède.
5. La force de frottement qu'exerce l'air sur la goutte de pluie n'est, elle, pas négligeable. Elle vaut :
$$f = kv$$
Avec dans cette situation : $k = 3{,}6 \times 10^{-5}\ \mathrm{N \cdot s \cdot m^{-1}}$.
En appliquant la deuxième loi de Newton, établir l'équation différentielle satisfaite par v_y (coordonnée verticale du vecteur-vitesse) au cours du mouvement.
6. Vérifier que l'expression suivante est bien une solution de l'équation différentielle et qu'elle respecte la condition initiale sur $v_y(0)$:
$$v_y(t) = \frac{gm}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$
7. À partir de l'expression précédente, exprimer et calculer la vitesse limite atteinte par la goutte de pluie et comparer le résultat à la valeur donnée à la question 3.
8. On estime que le régime permanent est atteint lorsqu'il s'est écoulé une durée égale à 5τ, τ étant le temps caractéristique de la chute. Au bout de combien de temps, le régime permanent est-il atteint ?
9. Voici la représentation graphique de la vitesse de la goutte en fonction du temps :



Exploiter ce graphique pour vérifier les réponses aux questions 7 et 8.

EXERCICE 12 : bassin de décantation

Une des étapes du traitement des eaux chargées de particules en suspension consiste à les faire transiter dans des grands bassins, dans lesquels les particules en suspension se déposent lentement. Les chantiers de construction utilisent cette technique pour éliminer les particules en suspension avant de rejeter les eaux.



représentation schématique de la décantation dans le bassin

La taille du bassin est directement liée à la durée nécessaire pour qu'une particule ait le temps de se déposer.
Le but de cet exercice est de déterminer la durée moyenne au bout de laquelle des particules d'argile atteignent le fond du bassin.

Données :

– diamètre moyen d'une particule fine $d = 0{,}400\ \mathrm{mm}$
– masse volumique de l'argile $\rho_a = 1600\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
– masse volumique de l'eau $\rho_e = 1000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
– force de frottement pour une particule sphérique de diamètre d : $f = 3\pi\eta dV$
– viscosité de l'eau $\eta = 1{,}00 \times 10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s}$;

1. Faire un schéma pour représenter l'ensemble des forces appliquées à une particule en train de se déposer.
2. En utilisant un repère d'étude (Oz) ayant pour origine la position d'une particule d'argile en surface du bassin de décantation à $t = 0$, et orienté vers le bas, appliquer la deuxième loi de Newton et établir l'équation différentielle satisfaite par $v_z(t)$, coordonnée verticale du vecteur-vitesse. On admettra que le mouvement est vertical, vers le bas et que la particule n'a pas de vitesse initiale.
3. Exploiter l'équation différentielle pour calculer numériquement :
   - la vitesse limite de chute v_{lim} ;
   - le temps caractéristique τ de la chute.
4. Calculer la durée que met une particule pour tomber au fond du bassin, en admettant que sa vitesse est en régime permanent dès son départ.
5. Comparer τ et Δt pour valider ou informer l'hypothèse selon laquelle le régime permanent est établi depuis le départ de la particule.