# Fiche de synthèse n°5
# Ondes mécaniques stationnaires

## 1. Onde mécanique sur une corde tendue entre deux points fixes

### 1.1. Faits expérimentaux

Lorsqu'une corde est tendue entre deux points fixes et mise en oscillation forcée, seules certaines fréquences permettent de la mettre en résonance. Toutes ces fréquences sont des multiples d'une fréquence particulière appelée **fréquence fondamentale** de la corde.

fréquence $f_1$ fréquence $f_2 = 2f_1$ fréquence $f_3 = 3f_1$

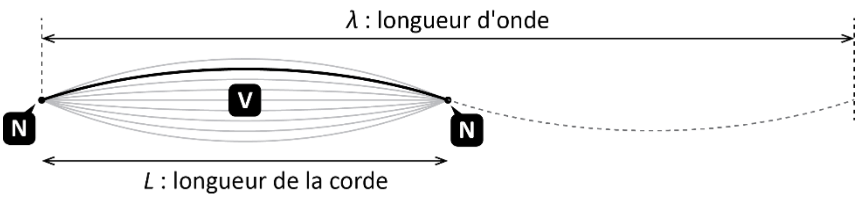
### 1.2. Modes propres d'une corde tendue entre deux points fixes

#### Nœuds et ventres de vibration

> Un nœud de vibration est un point de la corde dont l'amplitude de vibration est nulle à tout instant.
> Un ventre de vibration est un point de la corde sont l'amplitude de vibration est maximale.

#### Modes propres, fréquences et longueurs d'onde

**MODE FONDAMENTAL** (de rang $n = 1$)



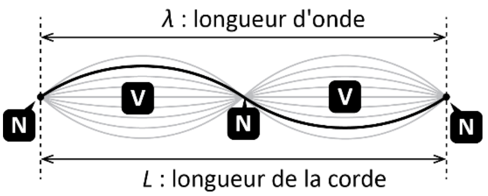

Fréquence : $f_1$

Longueur d'onde :

$$\lambda_1 = 2L$$

---

**MODE HARMONIQUE** de rang $n = 2$




Fréquence :

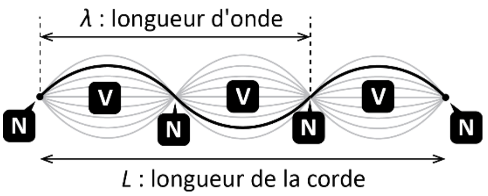
$$f_2 = 2f_1$$

Longueur d'onde :

$$\lambda_2 = \frac{2L}{2} = L$$

---

**MODE HARMONIQUE** de rang $n = 3$




Fréquence :

$$f_3 = 3f_1$$

Longueur d'onde :

$$\lambda_2 = \frac{2L}{3}$$

#### À retenir :

- Une corde tendue entre deux points fixes possède **plusieurs fréquences de résonance**, dont les valeurs sont discrètes (c'est-à-dire ne peuvent prendre que certaines valeurs).

- Chacune de ces résonances est un **mode propre** de la corde.
- On appelle **rang** d'un mode propre le nombre de ventres de vibration.
- Le mode propre de rang 1 est appelé **mode fondamental.** Les autres modes sont des modes **harmoniques**.
- Deux nœuds de vibration sont distants d'une demi-longueur d'onde.
- La longueur d'onde associée au mode fondamental est égale à deux fois la longueur de la corde.
- Si une corde a une longueur $L$ et un mode fondamental de fréquence $f_1$, alors ses modes de vibration de rangs $n$ ont des fréquences $f_n$ **multiples de la fréquence fondamentale**.

D'où :

$$f_n = n \times f_1 \quad \text{et} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

### 1.3. Lien avec les instruments à corde

#### Hauteur du son produit par un instrument à cordes

Un guitariste, un violoniste, etc., agit sur la longueur de la partie vibrante des cordes de son instrument pour ajuster la hauteur des notes produites : cela peut être expliqué par les relations que nous venons d'introduire.
La hauteur du son produit dépend de la fréquence fondamentale (voir chapitre 4) de l'onde sonore. Or : plus la corde est courte, plus la longueur d'onde $\lambda_1 = 2L$ est faible donc plus la fréquence $f_1$ est élevée.

On produit donc un son d'autant plus aigu que la corde est courte.

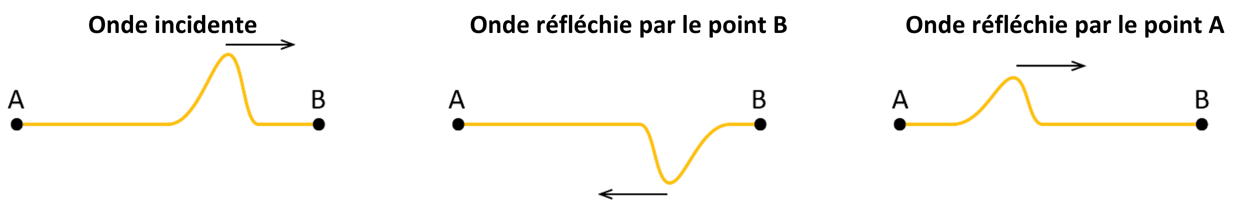
#### Timbre du son produit par un instrument à cordes

Dans un instrument à cordes, chaque corde est excitée (frottée comme dans un violon, pincée comme sur une guitare, frappée comme sur un piano) et ensuite laissée en oscillation libre.
L'onde qui prend alors naissance est une superposition d'ondes stationnaires sinusoïdales correspondant aux modes propres identifiés au paragraphe précédent.
C'est la raison pour laquelle le son musical qui en résulte est constitué d'un fondamental et d'harmoniques de fréquences multiples de la fréquence fondamentale (voir séquence 4).
Les amplitudes de ces harmoniques donc le timbre du son produit dépendent de l'instrument et de la manière dont la corde est excitée.

## 2. Interprétation : modèle de l'onde stationnaire

### 2.1. Réflexion d'une onde sur un point fixe de la corde

Un point fixe, sur une corde, engendre le phénomène de réflexion. Il peut être schématisé ainsi :




#### Cas où l'onde est périodique

Si l'onde est périodique, alors elle est amplifiée lorsqu'un maximum de l'onde incidente coïncide avec un maximum de l'onde réfléchie. Cela se produit lorsque la durée d'un aller-retour correspond à un nombre entier de périodes, que nous noterons $n$. Cela se traduit par :

$$\underbrace{\frac{2L}{v}}_{\text{durée d'un aller-retour}} = \underbrace{nT}_{\text{nombre entier de périodes}}$$

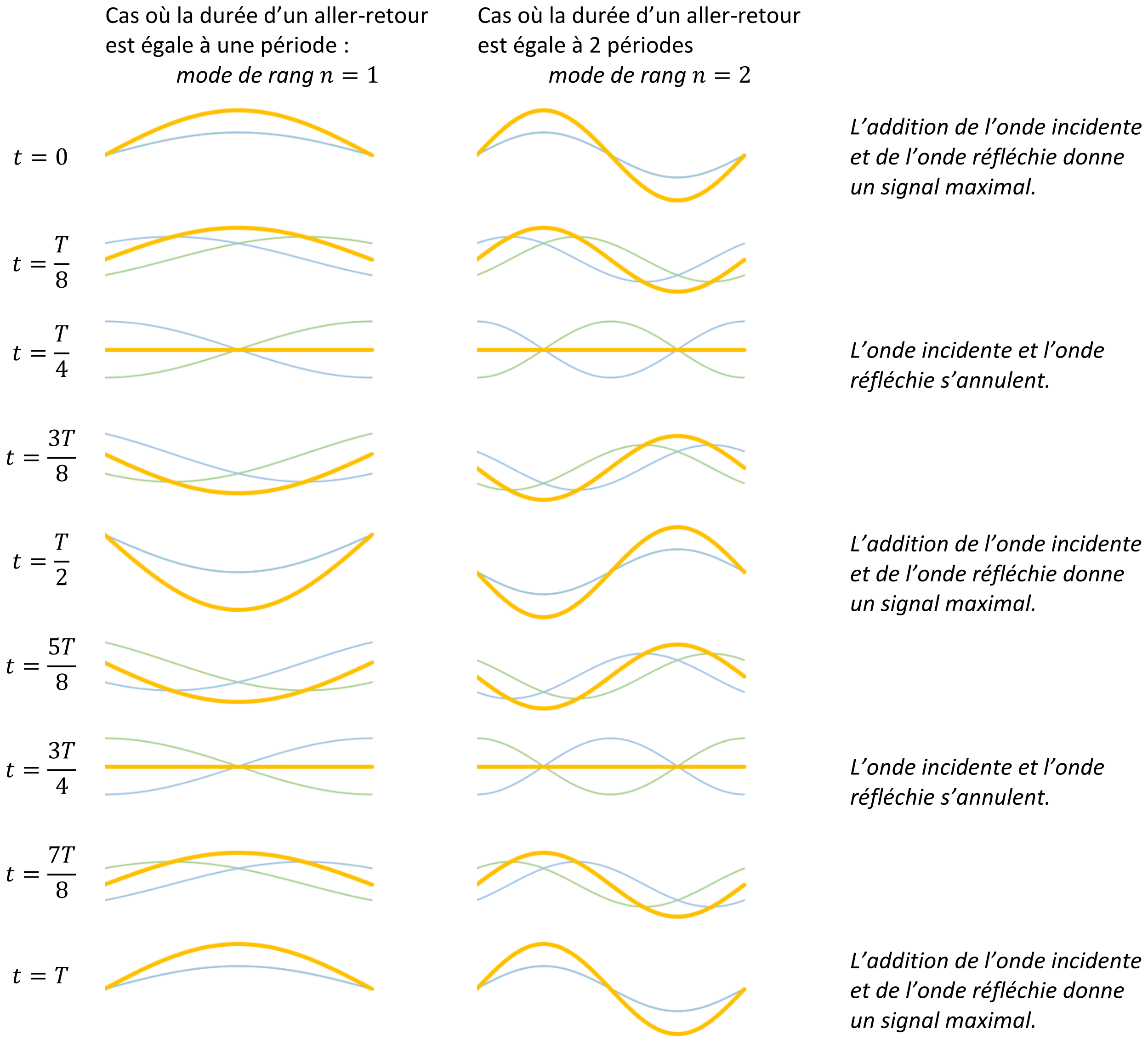
$$\frac{2L}{v} = \frac{n}{f}$$

On en déduit :

$$f = n \times \underbrace{\frac{v}{2L}}_{\substack{\text{fréq.} \\ \text{fondamentale}}}$$

**Exemples**

: onde se propageant vers la droite (onde incidente)
: onde se propageant vers la gauche (onde réfléchie)
: superposition des deux ondes




## 2.2. L'onde stationnaire

Lorsque la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie donne une onde d'amplitude plus élevée que l'onde incidente, on obtient une onde qui ne progresse pas. On l'appelle **onde stationnaire**.

Une onde stationnaire est le résultat de la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie de même fréquence, même célérité donc même longueur d'onde.
Une onde stationnaire se propage dans son milieu mais **ne progresse pas**.
Une onde stationnaire ne peut exister que dans un milieu où ont lieu des réflexions, soit dans un **milieu limité**.

# 3. Ondes sonores dans une colonne d'air

## 3.1. Nœuds et ventres dans une colonne d'air

### Notion de pression acoustique :

Lorsqu'une onde sonore perturbe un milieu, sa pression varie. Une grandeur vibratoire permettant de décrire l'onde sonore est **la pression acoustique** : on appelle ainsi la différence entre la pression à la date $t$ en un point donné et la pression que l'on aurait sans onde sonore.

### La colonne d'air

On appelle colonne d'air un milieu dans lequel une onde sonore se propage à une dimension. Expérimentalement, il s'agit d'un tuyau dont les extrémités peuvent être ouvertes ou fermées.
Chaque extrémité, qu'elle soit ouverte ou fermée, constitue un « obstacle » à l'onde sonore et engendre une réflexion.

> Une colonne d'air peut donc être le siège d'une onde stationnaire.

Si l'extrémité est ouverte, la pression est voisine de la pression atmosphérique donc l'amplitude sonore est faible.
Si l'extrémité est fermée, la pression peut osciller avec une grande amplitude : l'amplitude sonore y est maximale.
**À retenir :**

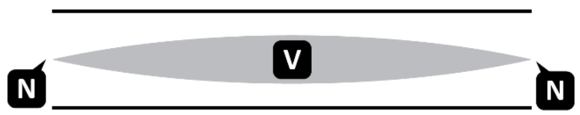
> Au niveau de l'ouverture d'une colonne d'air on a **un nœud d'amplitude** sonore.
> Au niveau de l'extrémité fermée d'une colonne d'air on a **un ventre d'amplitude** sonore.
>
> Deux nœuds consécutifs ou deux ventres consécutifs sont distants d'une demi-longueur d'onde.

## 3.2. Colonne d'air ouverte aux deux extrémités

Si une colonne d'air est ouverte à ses deux extrémités, on obtient un nœud d'amplitude sonore à chacune des extrémités. Les fréquences et longueurs d'onde permettant d'obtenir une résonance satisfont donc les mêmes lois que la corde vibrante (une ouverture joue, pour la pression, un rôle analogue à un point fixe pour la vibration de la corde).

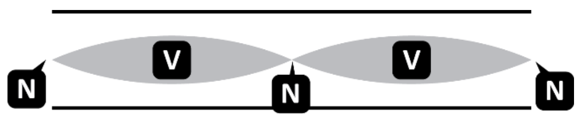
### Modes propres de la colonne d'air ouverte aux deux extrémités

**MODE FONDAMENTAL** (de rang $n = 1$)



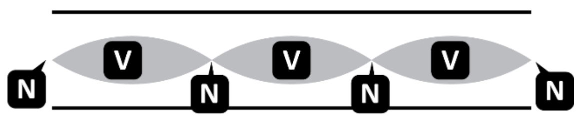

- Longueur d'onde :
  La distance entre deux nœuds consécutifs vaut une demi-longueur d'onde, donc :
  $$L = \frac{\lambda_1}{2} \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 = 2L$$
- Fréquence :
  $$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}$$

**MODE HARMONIQUE** de rang $n = 2$




- Longueur d'onde :
  $$L = 2 \times \frac{\lambda_2}{2} = \lambda_2 \;\Leftrightarrow\; \lambda_2 = L = \frac{\lambda_1}{2}$$
- Fréquence :
  $$f_2 = 2 f_1$$

**MODE HARMONIQUE** de rang $n = 3$




- Longueur d'onde :
  $$L = 3 \times \frac{\lambda_1}{2} \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 = \frac{2L}{3} = \frac{\lambda_1}{3}$$
- Fréquence :
  $$f_3 = 3 f_1$$

On retiendra, pour la colonne ouverte :

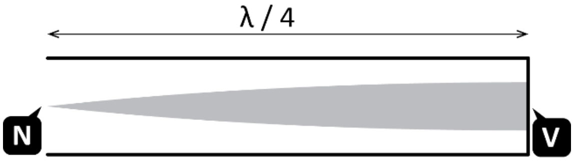
- la longueur d'onde associée au mode fondamental est égal à **2 fois** la longueur de la colonne ;
- les fréquences propres sont **des multiples** de la fréquence fondamentale.

D'où :

$$f_n = n \times f_1 \quad \text{et} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

## 3.3. Colonne d'air fermée à une extrémité

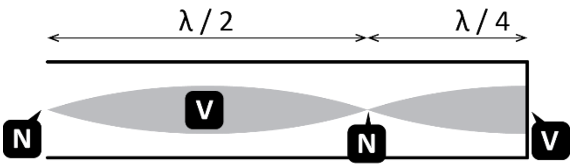
**MODE FONDAMENTAL** (de rang $n = 1$)




- Longueur d'onde :
  La distance entre un nœud et un ventre consécutifs vaut un quart de longueur d'onde, donc :
  $$L = \frac{\lambda_1}{4} \Leftrightarrow \lambda_1 = 4L$$
- Fréquence :
  $$f_1 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4L}$$

---

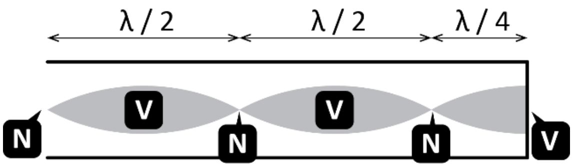
**MODE HARMONIQUE** de rang $n = 2$




- Longueur d'onde :
  $$L = \frac{3}{4}\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{4L}{3} = \frac{\lambda_1}{3}$$
- Fréquence :
  $$f_2 = 3f_1$$

---

**MODE HARMONIQUE** de rang $n = 3$




- Longueur d'onde :
  $$L = \frac{5}{4}\lambda_3 \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{4L}{5} = \frac{\lambda_1}{5}$$
- Fréquence :
  $$f_2 = 5f_1$$

On retiendra que, pour la colonne fermée à une extrémité :

- la longueur d'onde associée au mode fondamental est égal à **4 fois** la longueur de la colonne ;
- les fréquences propres sont **des multiples impairs** de la fréquence fondamentale.

D'où :

$$f_n = (2n - 1) \times f_1 \quad \text{et} \quad \lambda_n = \frac{4L}{2n - 1}$$

## 3.4. Lien avec les instruments à vents

Un instrument à vent est généralement modélisable comme une colonne d'air excitée par un vibreur.

- La hauteur du son produit, déterminée par la fréquence fondamentale de l'onde sonore, augmente lorsque la longueur de la colonne d'air décroît (par exemple, un flûtiste obtient un son d'autant plus aigu qu'il a débouché des trous éloignés de l'extrémité de son instrument). Cela s'explique par le fait que la longueur d'onde est proportionnelle à la longueur $L$ de la colonne d'air, la fréquence lui est donc inversement proportionnelle.
- L'excitation de la colonne d'air génère plusieurs ondes stationnaires correspondant à ses modes propres et est à l'origine du timbre de l'instrument.

De nombreux instruments à vent possèdent des ouvertures partielles à certains endroits. La modélisation des sons qu'ils produisent est plus complexe que ce que le modèle introduit dans ce chapitre peut expliquer.