Fiche de synthèse 9
Les lois de Newton

1. Énoncé des lois de Newton (rappel de $1^{ère}$)

Les deux premières lois de Newton telles que nous les abordons au lycée ne sont valables que dans certains référentiels appelés les référentiels galiléens. C'est une notion complexe qui n'est pas exigible. Mais retenons que :

- pour des expériences de laboratoire usuelles, les référentiels terrestre, géocentrique et héliocentrique peuvent être considérés comme galiléens ;
- tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

1.1. La première loi de Newton ou *principe d'inertie*

Dans un référentiel galiléen :

- Si un système est soumis à des forces qui se compensent, alors son centre d'inertie est au repos ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme.
- Réciproquement : si un système est au repos ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme, il est soumis à des forces qui se compensent.

Remarque :
La notion de référentiel galiléen est introduite dans l'activité 1 de la séquence 7. Il s'agit d'une notion complexe qui n'est pas exigible en $1^{ère}$. On retiendra que.

Notion de « forces qui se compensent »

Mathématiquement, l'expression « les forces se compensent » signifie que la somme vectorielle ou **résultante** des forces exercées sur le système est égale au vecteur nul, ce que l'on peut écrire symboliquement :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Énoncé synthétique de la première loi de Newton

On peut donc écrire la première loi de Newton sous la forme condensée :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_G} \text{ constant}$$

1.2. La $2^{ème}$ loi de Newton ou *relation fondamentale de la dynamique*

Dans un référentiel galiléen : la résultante des forces exercées sur le système est égale au produit de sa masse et du vecteur-accélération de son centre d'inertie :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Sens physique de la $2^{ème}$ loi de Newton :

- La deuxième loi énonce que des forces de résultante non nulle engendrent une accélération du système, soit une **modification de son vecteur vitesse**. Elle complète donc la première loi.
- La présence de la masse dans le terme de droite indique que pour des forces données, l'accélération est d'autant plus faible que la masse du système est élevée. Ceci correspond à l'affirmation « les effets d'une force sont d'autant moins grands que le système sur lequel elle s'exerce est grande ».

1.3. La 3ème loi de Newton ou principe des actions réciproques

Si un système A exerce une force sur un systèe B, alors réciproquement, B exerce sur A une force de même valeur, même direction mais de sens opposé.
On peut écrire cette sous la forme mathématique suivante :

$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}}$$

2. Étude newtonienne du mouvement plan de chute libre

2.1. Définition de la chute libre et modélisation de la situation étudiée

Définition de la chute libre :

On appelle chute libre le mouvement d'un système soumis à une seule force : son poids.

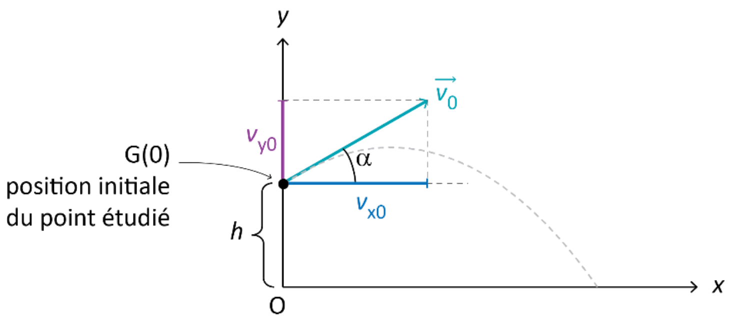
Une chute libre n'est pas forcément verticale. Si le système en chute possède une vitesse initiale, son mouvement sera plan : c'est ce cas que nous étudions en terminale.

Situation étudiée :

On étudie le mouvement d'un système en chute libre, représenté par son centre d'inertie :

- possédant, à la date $t = 0$, une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale ;
- dont la position initiale a une altitude h.

Les positions du centre d'inertie G sont étudiées dans un repère (O, x, y) défini ainsi :



Conditions initiales :

Initialement, le vecteur-vitesse du point étudié a pour coordonnées :

$$\vec{v}(0)\begin{pmatrix} v_{x0} = v_0 \cos\alpha \\ v_{y0} = v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Initialement, le vecteur-position du point étudié a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{OG}(0)\begin{pmatrix} x(0) = 0 \\ y(0) = h \end{pmatrix}$$

2.2. Accélération d'un système en chute libre

L'application de la 2ème loi de Newton au système en chute libre donne :

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$	(énoncé de la deuxième loi de Newton)
$\vec{P} = m\vec{a}$	(car le système est en chute libre)
$m\vec{g} = m\vec{a}$	(en tenant compte de l'expression du poids)
$\vec{g} = \vec{a}$	(en simplifiant par m)

Le vecteur accélération du corps en chute libre (qu'il possède ou non une vitesse initiale) est donc constant et a pour coordonnées :

$$\vec{a}\begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{pmatrix}$$

2.3. Lois horaires de la vitesse

Expressions des coordonnées de $\vec{v}$ à partir de celles de $\vec{a}$

Les coordonnées du vecteur-vitesse sont des fonctions primitives des coordonnés du vecteur accélération, donc :

$$v_x(t) = C_1$$
$$v_y(t) = -gt + C_2$$

C et C' étant des constantes indépendantes du temps.

Prise en compte des conditions initiales :

- coordonnée v_x à la date $t = 0$:

  $v_x(0) = v_0 \cos\alpha$ → condition initiale

  $= C_1$ → relation précédente

  Donc $C_1 = v_0 \cos\alpha$

- coordonnée v_y à la date $t = 0$:

  $v_y(0) = v_0 \sin\alpha$ → condition initiale

  $= 0 + C_2$ → relation précédente

  Donc $C_2 = v_0 \sin\alpha$

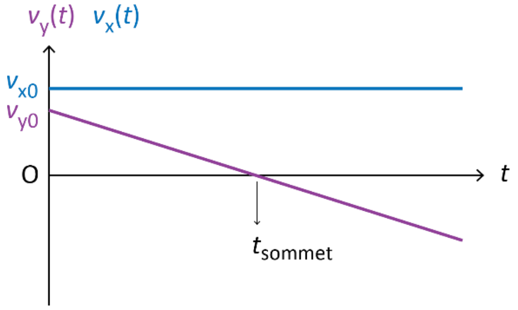
On en déduit les expressions en fonction du temps des coordonnées du vecteur-vitesse, appelées « lois horaires de la vitesse » :

$$\vec{v}(t)\begin{pmatrix} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Analyse physique du résultat obtenu

Les lois obtenues montrent que :

– la coordonnée horizontale du vecteur vitesse est constante : le système en chute libre conserve va vitesse initiale **horizontale** ;
– la coordonnée verticale du vecteur vitesse est une fonction affine du temps et de coefficient directeur $-g$.



évolutions temporelles des coordonnées du vecteur-vitesse. La date t_{sommet} est la date à laquelle la coordonnée verticale de $\vec{v}$ change de signe : $\vec{v}$ est alors horizontal, le système est donc au sommet de sa trajectoire.

2.4. Lois horaires de la position

Expressions des coordonnées du vecteur-position $\overrightarrow{OG}$ à partir de celles de $\vec{v}$

Les coordonnées du vecteur-position sont des fonctions primitives des coordonnés du vecteur-vitesse, donc :

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t + C_3$$
$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\alpha) t + C_4$$

C_3 et C_4 étant des constantes indépendantes du temps.

Prise en compte des conditions initiales :

coordonnée x à la date $t = 0$:

$x(0) = 0$ → condition initiale

$= 0 + C_3$ → relation précédente

Donc $C_3 = 0$

coordonnée v_y à la date $t = 0$:

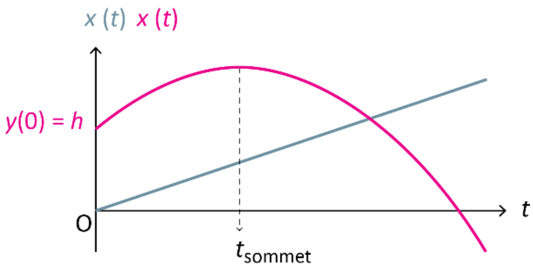
$y(0) = h$ → condition initiale

$= 0 + C_4$ → relation précédente

Donc $C_4 = h$

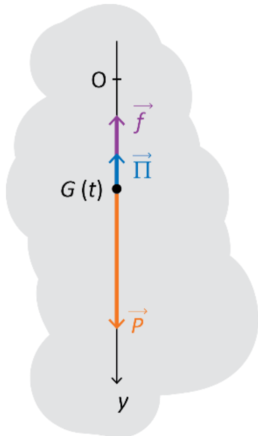
On en déduit les expressions en fonction du temps des coordonnées du vecteur-position, appelées « lois horaires de la position » :

$$\overrightarrow{OG}(t)\begin{pmatrix} x(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\alpha) t + h \end{pmatrix}$$



3. Étude newtonienne d'une chute verticale avec frottement visqueux

3.1. Étude qualitative du mouvement



La Situation étudiée et sa modélisation

Le système étudié et un objet en mouvement de chute dans un fluide visqueux, sans vitesse initiale. Son mouvement est étudié dans un repère (Oy), vertical et orienté vers le bas, dont l'origine coïncide avec la position initiale de son centre d'inertie.

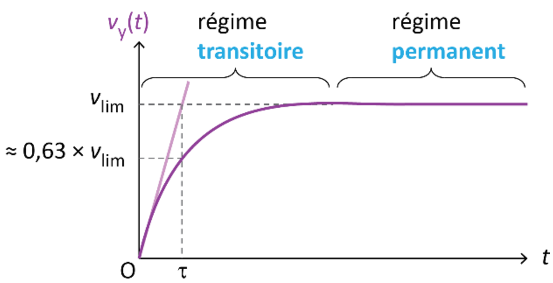
Forces exercées sur le système

Comme le système étudié est en mouvement dans un fluide visqueux, celui-ci exerce à la fois une poussée d'Archimède et une force de frottement.
Nous envisageons le cas où la force de frottement a une valeur proportionnelle à celle de la vitesse du système, ce qui est réaliste lorsque le fluide est suffisamment visqueux et le mouvement suffisamment lent.

3.2. Régime transitoire et régime permanent

La valeur de la force de frottement exercée par le fluide augmente proportionnellement à la vitesse du système en mouvement. Celui-ci peut donc être décomposé en deux phases :

- une phase de mouvement accéléré, appelé **régime transitoire**, obtenue tant que l'ensemble frottement + poussée d'Archimède ne compense pas le poids du système ;
- un phase de mouvement uniforme, appelée **régime permanent**, obtenue lorsque la force frottement a atteint une valeur telle que l'ensemble frottement + poussée d'Archimède compense le poids du système. La vitesse alors atteinte est appelée **vitesse limite** et notée v_{lim}.



La constante de temps τ :

La constante de temps τ est une estimation du temps caractéristique qui s'écoule entre le début du mouvement et l'établissement du régime transitoire. On peut le mesurer graphiquement par deux méthodes :

- c'est la durée au bout de laquelle la vitesse atteint 63% de sa valeur limite ;
- c'est l'abscisse du point où la tangente à la courbe $v_y(t)$ à la date $t = 0$ coupe la droite horizontale d'ordonnée v_{lim}.

3.3. Étude quantitative du mouvement à l'aide des lois de Newton

Expressions des forces exercées sur le système :

Selon les hypothèses énoncées en (3.1) le système est soumis à :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ de coordonnée verticale $P_y = mg$
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho V \vec{g}$ de coordonnée verticale $\Pi_y = -\rho V g$
  ρ étant la masse volumique du fluide visqueux et V le volume de l'objet en mouvement ;
- la force de frottement visqueux $\vec{f} = -k\vec{v}$ de coordonnée verticale $f_y = -kv_y$
  k étant une constante qui dépend du fluide et de la forme de l'objet en mouvement.

Application des lois de Newton

On cherche à établir la loi satisfaite par la coordonnée v_y du vecteur-vitesse du système. Dans ce but, énonçons la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Projetons à présent cette relation sur l'axe vertical Oy en exprimant tous les termes qui en dépendent en fonction de v_y :

$$mg - \rho V g - kv_y = ma_y$$
$$mg - \rho V g - kv_y = m\frac{dv_y}{dt}$$
$$\boxed{\frac{dv_y}{dt} + \frac{k}{m}v_y = g\left(1 - \frac{\rho V}{m}\right)}$$

On obtient une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{v_y}{\tau} = \frac{v_{lim}}{\tau}$$

Le cours de mathématiques a montré qu'une telle équation différentielle admet pour solution, avec comme condition initiale $v_y(0) = 0$:

$$v_y(t) = v_{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Par identification on obtient les expressions de la constante de temps et de la vitesse limite :

$$\tau = \frac{m}{k} \text{ et } v_{lim} = \frac{mg}{k}\left(1 - \frac{\rho V}{m}\right)$$

Autre méthode pour calculer la valeur de v_{lim} : à partir de l'équation différentielle

En régime permanent, la vitesse est, par définition, constante, donc $\frac{dv_y}{dt} = 0$. L'équation différentielle devient donc :

$$\frac{k}{m}v_{lim} = g\left(1 - \frac{\rho V}{m}\right)$$
$$v_{lim} = \frac{mg}{k}\left(1 - \frac{\rho V}{m}\right)$$