Lien entre mathématiques et physique-chimie : **Équations différentielles**

1. Définition

Une **équation différentielle** est une équation dont **l'inconnue est une fonction**. Elle s'exprime comme une relation entre cette fonction et ses dérivées.

2. Deux équations différentielles particulières très utilisées en physique-chimie

2.1. L'équation $y' = ay$

Définitions et théorèmes vus *en mathématiques*

Définition :

On appelle « équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants » l'équation :

$$y' = ay$$

- **Théorème 1 :**
  L'équation $y' = ay$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
  $$y(x) = Ce^{ax}$$
  C étant un nombre réel.

- **Théorème 2 :**
  Il existe une unique solution (donc une unique valeur de C) telle que $y(x_0) = y_0$.

Exemple d'application *en physique-chimie*

L'évolution d'une population de noyaux radioactifs satisfait l'équation différentielle :

$$\underbrace{\frac{dN}{dt}}_{y'} = \underbrace{-\lambda}_{a}\underbrace{N}_{y}$$

- **Application du théorème 1**
  Les solutions de cette équation sont telles que :
  $$N(t) = Ce^{-\lambda t}$$
  C étant un nombre indépendant du temps.

- **Application du théorème 2**
  La solution qui respecte la condition initiale $N(0) = N_0$ s'exprime par :
  $$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

2.2. L'équation $y' = ay + b$

Définitions et théorèmes vus *en mathématiques*

Définition :

On appelle « équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants avec second membre » l'équation :

$$y' = ay + b$$

- **Théorème 1 :**
  L'équation $y' = ay + b$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
  $$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$
  C étant un nombre réel.

- **Théorème 2 :**
  Il existe une unique solution (donc une unique valeur de C) telle que $y(x_0) = y_0$.

Exemple d'application *en physique-chimie*

La vitesse d'un objet en chute dans le champ de pesanteur, soumis à une force de frottement visqueux et sans vitesse initiale satisfait l'équation différentielle :

$$\underbrace{\frac{dv}{dt}}_{y'} = \underbrace{-\frac{k}{m}}_{a}\underbrace{v}_{y} + \underbrace{g}_{b}$$

- **Application du théorème 1**
  Les solutions de cette équation sont telles que :
  $$v(t) = Ce^{-kt/m} + \frac{mg}{k}$$
  C étant une constante indépendante du temps et homogène à une vitesse.

- **Application du théorème 2**
  La solution respectant la condition initiale $v(0) = 0$ s'exprime par :
  $$v(t) = \frac{mg}{k}e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$